مشکلات مکانی در هاب میانی اختصاصی

خلاصه

مدل مکانی گسسته سفارشی میانی، ابزاری قدرتمند در مدل سازی کلاسیک و راه حلی برای مشکلات مکانی است که با موفقیت در گستره وسیعی از این مشکلات گسسته اعمال شده است. اگرچه این مدل ها از نقطه نظر مجموع، حداکثر و پوششی به خوبی آنالیز شده اند، اما هرگز به عنوان واحدی مشترک در نظر گرفته نشده اند. در این مقاله فرمول بندی جدیدی را ارایه می کنیم که اساس آن عملکرد میانی سفارشی برای مشکلات مکانی هاب با الگوی توزیع جدید در زنجیره تامین شبکه می باشد. در این روش برخی خطاهای مربوط به هزینه توزیع با در نظر گرفتن ترتیب قرار گیری این هزینه ها معرفی شده اند. در ابتدا فرمول بندی اساسی برای این مسئله و سپس فرمول بندی توسعه یافته ای ارایه خواهد شد. عملکرد تمامی این موارد به کمک آنالیز کامپیوتری مقایسه شده است.

1- مقدمه

مباحث مربوط به موقعیت هاب، گستره وسیعی از مدل هایی را که هدف آنها به حداقل رساندن برخی عملکردهای محلی می باشد را شامل می شود. مقالات [1,9] و مراجع آنها مطالعه شود. علی رغم اینکه موضوع اکثر مقالات در مورد کاهش هزینه کلی انتقال می باشد، اما در برخی تحقیقات به سایر موارد در این زمینه پرداخته شده است. این مدل از سایر نقطه نظرات که امروزه مورد نیاز علم منطق می باشند بررسی نشده است. امروزه نیاز به مدل های بسیار انعطاف پذیر می باشد تا هرکدام نقشی را در شبکه ایفا کنند. می توان گفت که مدل های کلاسیک سعی در به حداقل رساندن مجموع هزینه های انتقال در هر مسیر را دارند. برای مثال سیستم از نقطه نظر منطقی بررسی می شود. به مرجع 41 مراجعه شود. همچنین با توجه به نیروی محرک شبکه منطقی، می توان موارد مختلف مانند مشتری ها، تامین کننده ها و ترکیبی از این دو را از هم متمایز کرد. اولین تلاش در این زمینه در مراجع 2، 15، 16، 18، 19 و 41 آورده شده است و به طور عمده بر تفاوت نقش کاربران در شبکه زنجیره تامین در فاز توزیع

تمرکز دارد. در این مقاله به شرح مسیر اشاره شده در بالا پرداخته و مدلی را ارایه دادیم که می تواند نقش بخش های مختلف در شبکه زنجیره هاب را مشخص کند. ابتدا انعطاف پذیری را به کمک فاکتور جبران یکپارچه می کنیم و سپس فرض می شود که نیروی محرک در زنجیره توسط تامین کنندگان و توزیع کنندگان سیستم به اشتراک گذاشته شده است. تامین کنندگان، هزینه انتقال از سایت مرجع به اولین هاب و توزیع کنندگان هزییه انتقال را از اولین هاب به به سایت مقصد را بر عهده می گیرند.

در این مقاله به معرفی و آنالیز موقعیت هاب با الگوی تو.زیع جدید که توسط کابران مختلف در زنجیره تامین استفاده شده است خواهیم پرداخت. در واقع شبکه زنجیره تامین را به گونه ای فرض می کنیم که عملیات داخل شبکه، شامل تحویل بخش به بخش مقدار نامشخصی از کالا باشد. هدف این است که به طور همزمان، موقعیت نقطه انتقال میانی(هاب) و مسیرهای تحویل(الگوهای توزیع) مشخص شوند. سعی بر این است که یک سیستم توزیع میانه با تعداد هاب های ثابت برای به حداقل رساندن هزینه کلی عملیات شبکه زنجیره تامین پایه گذاری شود. به علاوه فرض می شود که هر مسیر تحویل شامل دو بخش 1- مسیری که سایت مرجع را به اولین نقطه دسترسی وصل می کند و 2- مسیری که هاب اولی را به مقصد نهایی وصل می کند باشد. به علاوه جزء دوم خود شامل دو بخش 2-1- لینک داخلی هاب و 2-2- لینکی که هاب را به مقصد آخر وصل می کند می باشد. این ساختار به ما اجازه می دهد که بین اجزاء مختلف و نقش آنها در زنجیره تامین تمایز قائل شویم. فرض بر این است که هر مرجع باید هزینه ارسال به اولین هاب را تامین کند در حالی که سیستم توزیع میانی، هزینه های باقی مانده را تقبل می کند. برای مثال سیستم توزیع مسئول ارسال به هاب اولیه می باشد. این مورد شبیه شرکت های سهام است که در آن بخش های سطح اول، کالا را به مرکز توزیع رسانده و سپس به مقصد نهایی تحویل داده می شوند.

هر جزء از مسیر تحویل که در بالا شرح داده شده است، موجب افزایش هزینه ناشی از فاکتورهای جبران خواهد شد. از نقطه نظر کاربردی، تحویل های یکسان در سیستم توزیع مانند تحویل از اولین هاب به مقصد نهایی، باید ارزان تر از بخش اولیه هزینه باشد تا بتوان آن را به کمک تجهیزات بزرگتر و با هزینه کمتر انجام داد(به دلیل ابعاد بزرگ سیستم توزیع که تاثیر عمده ای در هزینه خواهد داشت). در نتیجه ما در مدل خود فرض کردیم که لینک های

داخل هاب توسط تجهیزاتی مشابه (هواپیما، کامیون های بزرگ و ...) پوشش داده شده و هزینه مربوط به این لینک ها مقدار ثابت α بین 0 و 1 خواهد بود. به علاوه فرض می کنیم که لینک های بین هاب آخر و سایت های مقصد توسط تجهیزات متفاوتی پوشش داده می شوند و هزینه های مربوطه نیز با فاکتور δ بین 0 و 1 مشخص خواهند شد. دلیل استفاده از دو فاکتور مختلف برای این لینک ها، تفاوت بین بارگذلری و باربرداری در سیستم های مورد استفاده هاب می باشد. موقعیت هاب دلالت بر سیستم های اتوماتیک بارگذاری و باربرداری دارد که اجازه استفاده از تجهیزات بزرگ را خواهد داد در حالی که روش های سنتی فقط قابلیت استفاده از تجهیزات کوچک را دارند.

فرض می کنیم که کالای هر مرجع به هاب اولی انتقال یابد که نشان دهنده نقطه دسترسی به سیستم توزیع است. این مورد به صورت فاکتور جبران مشاهده می شود که سعی در کاهش و حذف موقعیت های نابرابر در سیستم توزیع دارد. خواننده باید توجه داشته باشد که ما به طور همزمان محل قرار گیری هاب برای تعیین سیستم توزیع و مسیر تحویل از سایت مرجع به مقصد نهایی را انتخاب می کنیم. در نتیجه راه حلی که برای کل سیستم مناسب است، به دلیل هزینه بالای آن، برای بخشی از سیستم مناسب نخواهد بود. برای مثال اگر راه حلی برای دسته ای از هاب ها قابل قبول باشد، هزینه دسترسی مرجع j ، بزرگتر از هزینه متناظر j' خواهد بود (توجه داشته باشید که در این موارد، سایت j' را جریمه نمی کند اما در عوض j را به دلیل کاهش پرامندگی هزینه کمک می کند). برای سهیم کردن این موارد در هزینه کل، ضریب اصلاحی به آن اعمال می شود که وابسته به میزان هزینه، نسبت به هزینه های مشابه می باشد. برای مثال اگر هزینه انتقال کالا از سایت مرجع j پنجمین هزینه بالا باشد، خطای اعمالی نسبت به دومین هزینه بالا متفاوت خواهد بود. مراجع 3، 30، 30، 35 و 36 مطالعه شوند. همچنین می توان با اعمال خطای صفر، از برخی موارد چشم پوشی کرد. این قضیه موجب ایجاد مشکل در موقعیت هاب خواهد شد و راه حل و فرمول بندی را بسیار چالش برانگیز خواهد کرد.

هدف ارایه چهارچوب یکسان برای آنالیز این مدل ها با در نظر گرفتن اطلاعات معمول برای نیل به احتیاجات منطقی می باشد. به طور معمول هدف به حداقل رساندن هزینه انتقال کل در جریان های بین مرجع و مقصد می باشد.

بقیه بخش های این مقاله به صورت زیر سازمان دهی شده است. در بخش 2 به شرح مدل و ایجاد یک فرمول بندی ریاضی با استفاده از 3 شاخص متغیر خواهیم پرداخت. در بخش 3 فرمول های جایگزین برای هاب را بررسی خواهیم کرد. در بخش 4 آنالیز مقدماتی را برای تعیین حدود حل مسئله با استفاده از حل گرهای MIP استاندارد انجام خواهیم داد. بخش 5 به توسعه فرمول بندی های قبلی و ایجاد فرمول بندی جدید می پردازد. نتایج این بخش به صورت آنالیز کامپیوتری در بخش 6 مقایسه می شوند که در آخر مقاله آورده شده اند.

2 – مدل و فرمول بندی سه شاخصه

A نشان دهنده N سایت است که توسط اعداد صحیح 1 تا N نشان داده می شود. هر سایت به جمع آوری برخی کالا ها می پردازد که باید به سایت های باقی مانده ارسال شوند. $w_{jm} \geq 0$ میزان کالای تامینی از سایت j ام به سایت m ام برای تمامی $m \in \{1,\dots,N\}$ و $W_j = \sum_{m=1}^{N} w_{jm}$. می باشد. در ادامه فرض می کنیم که تعداد سایت ها برای ایجاد هاب، مشابه سایت های A باشد. $c_{jm} \geq 0$ نشان دهنده هزینه واحد ارسال کالا از سایت j ام به سایت m خواهد بود. فرض می کنیم که $c_{jj}=0,\ \forall j=1,\dots,N$ و $p \leq N$ تعداد هاب ها و $X \subset A$ با $|X|=p$ نشان دهنده سایت های در دسترس باشد. راه حل مسئله میزان X به علاوه یک جفت مسیر اتصالی در سایت های j و m برای تمامی j ها می باشد به طوری که هر مسیر حداقل 1 و حداکثر 2 هاب را از خود عبور دهد. برای بالا بردن دقت (i) اگر سایت مرجع و سایت مقصد به صورت هاب نباشند، جریان باید از طریف 1 یا 2 هاب میانی انتقال یابد. (ii) اگر سایت مرجع و یا مقصد به صورت هاب باشند، جریان بین آنها می تواند به طور مستقیم یا از طر یق یک هاب صورت گیرد. (iii) اگر سایت مرجع و مقصد به صورت هاب باشند، جریان به صورت مستقیم از سایت مرجع به مقصد خواهد رفت.

این مدل هزینه انتقال هاب در سایت مرجع را با استفاده از پارامترهای $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_N)$ جبران می کند. این فاکتورها با توجه به ترتیب هزینه های انتقال به مرجع اعمال می شوند. اگر کالا از سایت مرجع j توسط هاب k با هزینه

تحویل $W_j c_{jk}$، در رتبه i ام قرار گیرد، این هزینه توسط λ مقیاس دهی می شود. برای مثال تابع متناظر به صورت $\lambda_i W_j c_{jk}$ خواهد بود. به علاوه پارامتر جبران را به صورت 1>α>0، برای تحویل بین هاب ها فرض می کنیم و پارامتر دیگر نیز به صورت 1>δ>0 خواهد بود. توجه داشته باشید که δ>α می باشد. این پارامترها دلالت بر این دارد که هاب دوم موجب ضعف ارتباط از هاب اول به مقصد نهایی خواهد شد.

با توجه به انتخاب بردار λ می توان معیارهای مختلفی را برای براورد هزینه در انتقال از مرجع به مقصد نهایی استفاده کرد. برای مثال اگر $\lambda = (0,\ldots,0,1,\overset{k}{\ldots},1)$ به عنوان تابع هدف در نظر گرفته شود، جمع بزرگترین k ها به عنوان هزینه کل خواهند بود. در ادامه رفتار متفاوتی ار مدل را برای بردارهای λ مختلف و تک هاب میانی نشان خواهیم داد. برای این منظور از داده های CAB موجود در http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/info.html استفاده خواهیم کرد که $N=20, p=5, \alpha=0.7$ و $\delta=1.2\alpha$ می باشد . جدول 1 نشان دهنده سایت های هاب برای معیارهای مختلف$\lambda=(0,\ldots,0,1)$، $k_1=k_2=8$ و $(0,\overset{8}{\ldots},0,1,1,1,1,0,\overset{8}{\ldots},0)$، $k=9$ و $(0,\ldots,0,1,\overset{9}{\ldots},1)$ نشان داده شده است. می توان گفت که راه حل های به دست آمده برای تمامی معیارها متفاوت خواهند بود. به علاوه در این جدول مشاهده می شود که در مواردی که یک سایت مشابه به عنوان هاب انتخاب شود، مسیر و الگوی سایت های مرجع به هاب متفاوت خواهند بود. برای مثال در راه حل بهینه برای هاب P میانی، تعداد 2 عدد هاب در سایت های 2 و 13 وجود دارد.

2-1- فرمول بندی سه شاخصه

راه حل معمول برای به دست آوردن فرمول بندی مدل بالا، استفاده از متغیر هایی است که در هزینه انتقال از هر مرجع به هاب مختص به آن، از الگوی مشخصی پیروی کند. این شیوه موجب فرمول بندی متغیرهایی با 5 شاخص، یکی برای سفارش و 4 تای دیگر برای سایر موارد خواهد شد. در واقع با توجه به این امر که مسیر مرجع به مقصد نمی تواند برعکس باشد، می توانیم از این امر برای تعریف الگوی جریان استفاده کنیم. شاخص های اول و چهارم مربوط به مرجع و مقصد می باشند در حالی که شاخص های دوم و چهارم نشانگر هاب های میانی هستند. به جای این فرمول بندی، مدل ما می تواند الگوها را دسته بندی کرده و فرمول جدیدی با 3 شاخص ارایه کند. برای فرمول

بندی این مدل، دسته ای از λ ها را در نظر می گیریم که λi ضریب تصحیح برای موقعیت i ام خواهد بود. به علاوه متغیرهایی به صورت زیر نیز تعریف می شوند.

$r^{i}_{jk}=1$ اگر جریان از سایت مرجع j به اولین هاب k بوده و $W_j c_{jk}$ i امین مقدار کمینه هزینه انتقال از مرجع به هاب باشد. برای سایر حالت ها نیز مقدار r^{i}_{jk} برابر با 0 خواهد بود.

X_{klm}= جریانی که از هاب اولیه k و هاب ثانویه l به مقصد m حرکت می کند.

Center	Trimmed mean	*k*-Centrum	*p*-Hub median
2,3,14→2	1,10,13,16→1	1,14,16→1	2,3,17,18→2
4,11,15,19→4	4,7,8,11,12,15,17→4	4,5,6,9,11,13,15→4	4,5,6,9,20→5
8,12→8	3,14,18→18	7,8,10→7	8,11,15→11
7,10,13,16→13	19→19	12,19→12	1,7,10,13,14,16→13
1,5,6,9,17,18,20→20	2,5,6,9,20→20	2,3,17,18,20→17	12,19→19

جدول $Yk1$ برابر با یک می باشد اگر هاب در سایت k قرار داشته باشد و در سایر موارد برابر با 0 خواهد بود.

رابطه با سه شاخص به صورت زیر خواهد بود.

$$\min \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\lambda_i c_{jk} r_{jk}^{i} W_j + \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} x_{k\ell m}(\alpha c_{k\ell}+\delta c_{\ell m}) \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} r_{jk}^{i} = 1, \quad \forall j=1,\ldots,N \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} r_{jk}^{i} \le 1, \quad \forall i=1,\ldots,N \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} r_{jk}^{i} \le N y_k, \quad \forall k=1,\ldots,N \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} r_{jj}^{i} = y_j, \quad \forall j=1,\ldots,N \tag{5}$$

$$\sum_{\ell=1}^{N} x_{k\ell m} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} r_{jk}^{i} w_{jm}, \quad \forall k,m=1,\ldots,N \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} r_{jk}^{i} c_{jk} W_j \le \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} r_{jk}^{i+1} c_{jk} W_j, \quad \forall i=1,\ldots,N-1 \tag{7}$$

$$x_{k\ell m} \le (1-y_m)\sum_{j=1}^{N} w_{jm}, \quad \forall k,\ell,m=1,\ldots,N, \;\; \ell \ne m \tag{8}$$

$$\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} x_{k\ell m} \le y_k \sum_{j=1}^{N} W_j, \quad \forall k=1,\ldots,N \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} x_{k\ell m} \le y_\ell \sum_{j=1}^{N} W_j, \quad \forall \ell=1,\ldots,N \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{N} y_k = p \tag{11}$$

$$r_{jk}^{i} \in \{0,1\}, \quad x_{k\ell m},\, y_k \ge 0, \;\; \forall i,j,k,\ell,m=1,\ldots,N \tag{12}$$

تابع هدف، مربوط به برآیند سه جزو هزینه حمل و نقل، به خصوص از سایت مرجع به هاب اول، اتصالات داخلی هاب و هاب آخر به مقصد نهایی می شود. اولین هزینه های حمل و نقل بعد از فرآیند جبران، با استفاده از پارامتر λ محاسبه می شوند در حالی که سایر هزینه ها به کمک پارامترهای α و δ محاسبه خواهند شد. قیدهای 2 تضمین می کنند که هر سایت مرجع دقیقا به یک مکان در زنجیره هزینه های انتقال اختصاص داده می شود و تمامی جریان از طریق سایت مرجع با اولین هاب مرتبط خواهد بود. قید های 3 تضمین می کنند که هر موقعیت در بردار هاب اول، به حداکثر یک مورد اختصاص داده می شود. قیدهای 4 تضمین می کنند که یک مرجع ممکن است فقط به هاب اول اختصاص داشته باشد. این قید ها به صورت تفکیکی در رابطه زیر نشان داده می شوند.

$$\sum_{i=1}^{N} r_{jk}^{i} \le y_k, \quad \forall j,k=1,\ldots,N$$

نتایج محاسباتی نشان می دهند که استفاده از فرم تفکیکی به لحاظ زمان انجام محاسبات، نسب به قیدهای 3، دارای بدترین شرایط می باشد. قیدهای 5 بیان می کنند که اگر یک مرجع خود یک هاب باشد، اولین هاب در مسیر مرجع به مقصد، باید j باشد.

وظیفه قیدهای 6 قیدهای حفظ جریان بوده و تضمین می کنند جریانی که وارد هاب k می شود، همان جریانی است که از هاب k به مقصد m خواهد رفت. قیدهای 7 ارتباط بین هزینه های حمل و نقل با هاب سایت مرجع را مشخص می کنند. قیدهای 8 تضمین می کنند که اگر مقصد نهایی یک هاب باشد، جریان از هاب دیگری نیز عبور خواهد کرد. قیدهای 9 و 10 بیان می کنند که گره های میانی در هر مسیر باید به صورت هاب باشند. در نتیجه قید 11، تعداد هاب ها را برای جاگذاری ثابت می کند.

توسط قیدهای 5، متغیرهای y_k می توانند به صورت پیوسته تعریف شوند در حالی که متغیرهای r آنها را مجبور می کنند تا مقادیری به صورت 0 و 1 داشته باشند. در حقیقت متغیرهای y را می توان با استفاده از قیدهای 5 از این معادله حذف کرد اما به منظور تشخیص متغیرهای مکانی این کار انجام نشده است.

توجه داشته باشید قیدهای 5 و 8 در صورتی که نامساوی مثلث ارضاء شود کاربردی نخواهند داشت، و فقط در کاهش زمان حل موثر خواهند بود. (برای جزییات بیشتر به ضمایم مراجعه شود).

3- فرمول بندی جایگزین بر پایه پوشش متغیرها ; پوشش فرمول بندی سه شاخصه

در این بخش فرمول بندی جدیدی را بر اساس پوشش متغیرها ارایه می کنیم. برای این منظور ابتدا G را به عنوان تعداد المان های غیر صفر تعریف می کنیم. اگر تابع هزینه به صورت $W_j c_{jk}$ باشد در نتیجه می توان مقادیر این زنجیره را به صورت غیر افزایشی مرتب کرد.

$$c_{(0)} := 0 < c_{(1)} < c_{(2)} < \cdots < c_{(G)} := \max_{1 \le j,k \le N} \{W_j c_{jk}\}$$

با استفاده از این زنجیره می توانیم تمامی هزینه های تخصیصی را مرتب کنیم. این را می توان با استفاده از متغیرهای زیر انجام داد.($(i = 1,\ldots,N \text{ and } h = 1,\ldots,G)$)

U_{ih} اگر i امین هزینه کوچک برابر با c_h باشد مقدار 1 و در سایر موارد مقدار 0 خواهد داشت.

پایین ترین هزینه برابر با $c_{(h)}$ خواهد بود اگر $u_{ih}=1$ و $u_{i,h+1}=0$ صادق باشند.

در این صورت اولین بخش تابع هدف به صورت زیر نوشته می شود.

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{h=1}^{G} \lambda_i \cdot (c_{(h)} - c_{(h-1)}) \cdot u_{ih}$$

برای فرمول بندی این مدل اگر کالای ارسالی از سایت مرجع j به هاب k برود در این صورت r_{jk} برابر با 1 و در سایر موارد برابر با 0 خواهد بود.

مشاهده می شود که رابطه بین این متغیرها که در فرمول بندی سه شاخصه تعریف شده است و به صورت $r_{jk} = \sum_{i=1}^{N} r_{jk}^{i}$ می باشد. در نتیجه قیدی که رابطه بین متغیرهای r و u را نشان می دهد به صورت زیر خواهد بود.

$$\sum_{i=1}^{N} u_{ih} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ W_j c_{jk} \geq c_{(h)}}}^{N} r_{jk}, \quad \forall h = 1, \ldots, G$$

این قیدها بیان می کنند که تعداد تخصیص ها با حداقل هزینه c_h باید برابر با تعداد سایت هایی می باشد که هزینه حمل و نقل به هاب اول را تقبل می کند. معادله زیر جهت مرتب سازی قیدها با متغیرهای u_{ih} می باشد.

$$u_{ih} \leq u_{i+1,h} \quad i = 1, \ldots, N-1, \;\; h = 1, \ldots, G$$

با اعمال این متغیرها در فرمول بندی سه شاخصه روابط زیر بدست می آید.

$$\min \sum_{i=1}^{N}\sum_{h=2}^{G}\lambda_i(c_{(h)}-c_{(h-1)})u_{ih}+\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}x_{k\ell m}(\alpha c_{k\ell}+\delta c_{\ell m})$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^{N} r_{jk}=1, \quad \forall j=1,\ldots,N \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{N} r_{jk}\le N y_k, \quad \forall k=1,\ldots,N \tag{15}$$

$$r_{jj}=y_j, \quad \forall j=1,\ldots,N \tag{16}$$

$$\sum_{\ell=1}^{N} x_{k\ell m}=\sum_{j=1}^{N} r_{jk}w_{jm}, \quad \forall k,m=1,\ldots,N \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{N} u_{ih}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\ W_j c_{jk}\ge c_{(h)}}}^{N} r_{jk}, \quad \forall h=1,\ldots,G \tag{18}$$

$$u_{ih}\ge u_{i-1h}, \quad \forall i=2,\ldots,N,\ h=1,\ldots,G \tag{19}$$

$$\text{Constraints}: (8)-(11)$$
$$u_{ih}, r_{jk}\in\{0,1\}, \quad x_{k\ell m},\ y_k\ge 0,\ \forall i,j,k,\ell,m=1,\ldots,N$$

در رابطه بالا نیز قیدهای 8 و 16 در صورت ارضا نامساوی مثلث کاربردی نخواهند داشت و تنها موجب کاهش زمان تحلیل می شوند. قیدهای 15 را می توان به صورت تفکیکی زیر نشان داد.

$$r_{jk}\le y_k, \quad \forall j,k=1,\ldots,N$$

همانند بخش های قبل، می توان متغیرهای y را حذف کرد ولی به منظور تشخیص متغیرهای مکانی این کار انجام نمی شود.

4- مقایسه روابط

به منظور بهبود عملکرد روابط سه شاخصه، ابتدا باید توسط بررسی محاسباتی، آنها را مقایسه کنیم. روابط به همان صورت که در بخش قبلی نشان داده شده اند در نرم افزار Xpress IVE 1.19.01 و بر روی سیستمی با مشخصات GHz2.4 و 2GRAM مورد استفاده قرار می گیرند. در این مقاله روابط اشاره شده در بخش قبل مقایسه شده است.

برای تهیه نمونه های آزمایش، داده ها را با دو روش متفاوت ایجاد کردیم. در نمونه های اولیه، هزینه ها و جریان مرجع به مقصد را مشخص کرده و در نمونه های دوم، هزینه های اتفاقی را نیز در نظر گرفتیم. در این طراحی، هدف بررسی اختلاف بیK حالت های مختلف داده می باشد. هر مقدار که فاصله بخش بندی ها کوچک تر باشد، تعداد تکرار بیشتر خواهد بود. با استفاده از این داده ها می خواهیم بررسی کنیم که آیا اندازه پارامتر G در حل مسئله با فرمول بندی سه شاخصه مهم می باشد. روابط را در حالت های (i) ماتریس های هزینه (ii) N در {10 و 15 و 20} (iii) مقادیر مختلف p (iv) α=۷. و δ=۱.۲α و شش حالت مختلف بردارهای v بررسی کردیم.

جداول 2 و 3 نشان دهنده نتاج برای این نمونه ها می باشند. اولین ستون جدول نشان دهنده انواع مختلف مسایل در این بررسی خواهد بود. ستون های nodes، GAP،R-GAP و time نشانگر مقدار میانگین، میزان Gap، Gap نهایی بعد از یک ساعت و زمان cpu در واحد ثانیه می باشند. مقادیر بزرگتر از 3600 در ستون زمان نشان می دهند که برای حل مسئله نیاز به زمان بیشتر از 1 ساعت بوده و علامت * نشان می دهد که حداقل یک مورد از 5 نمونه مورد نظر، حل نشده است. در این موارد ستون Gap نشان دهنده این مقدار در زمان توقف خواهد بود.

با بررسی جداول مشخص می شود که در اغلب موارد، فرمول بندی پوششی به فرمول بندی سه شاخصه ارجحیت دارد. به علاوه این ارجحیت با کاهش میزان G افزایش می یابد.

جدول 2 : سری اول نمونه ها به همراه هزینه و جریان

N	p	3-Index formulation				Covering 3-index formulation			
		Nodes	R-GAP	GAP	Time	Nodes	R-GAP	GAP	Time
Center									
10	3	4710.20	28.98	0.00	11.14	1402.20	28.98	0.00	8.30
10	5	12394.60	22.81	0.00	26.84	812.60	22.81	0.00	4.81
15	4	326715.60	28.20	0.25	1723.59*	24945.20	28.20	0.00	282.52
15	8	391325.60	29.68	2.11	2191.61*	31162.00	29.37	0.00	245.48
20	5	197788.40	35.15	17.87	> 3600	158471.20	29.73	10.14	> 3600
20	10	159142.80	33.97	17.23	> 3600	212907.80	31.45	9.02	> 3600
k-Centrum									
10	3	6415.40	35.60	0.00	14.26	1261.40	35.60	0.00	6.73
10	5	2510.60	22.38	0.00	9.74	107.00	22.38	0.00	1.83
15	4	344490.20	36.74	0.38	1812.32	55281.00	36.74	0.00	450.75
15	8	69489.80	23.11	0.00	519.62	2761.00	27.73	0.00	44.35
20	5	183830.80	47.93	30.69	> 3600	176535.40	42.07	20.29	> 3600
20	10	128686.00	32.52	9.57	> 3600	90138.60	31.97	0.61	1791.55*
Median									
10	3	283.80	20.44	0.00	2.13	181.00	20.44	0.00	2.64
10	5	191.40	15.87	0.00	1.96	116.60	15.87	0.00	2.15
15	4	9384.80	28.24	0.00	91.02	22743.80	28.24	0.00	207.74
15	8	3741.80	23.11	0.00	49.65	2453.00	23.11	0.00	39.01
20	5	142778.80	40.95	15.03	> 3600	183695.80	34.40	9.17	> 3600
20	10	41495.40	27.01	0.00	1590.50	34151.80	27.01	0.00	675.22
Trimmed mean									
10	3	774.80	24.54	0.00	4.05	215.80	24.54	0.00	2.30
10	5	158.60	19.32	0.00	2.46	101.40	19.32	0.00	1.63
15	4	17999.40	29.70	0.00	117.30	4329.00	29.70	0.00	44.87
15	8	2238.60	25.42	0.00	39.01	1645.80	25.42	0.00	27.78
20	5	191894.00	35.85	4.89	> 3600	47821.40	33.83	0.00	785.20
20	10	45374.80	28.76	0.00	1634.72	13215.00	28.76	0.00	316.20
Anti-trimmed mean									
10	3	5555.80	32.21	0.00	11.45	1722.60	32.21	0.00	8.35
10	5	9261.40	29.01	0.00	19.83	562.20	29.01	0.00	3.41
15	4	552415.80	29.63	2.22	2746.05*	22274.00	29.02	0.00	231.25
15	8	401730.00	29.40	0.89	2375.21*	9063.00	29.39	0.00	93.37
20	5	184341.40	42.85	24.06	> 3600	128408.80	35.33	7.60	2901.55*
20	10	168067.20	34.98	16.75	> 3600	183725.60	34.31	6.38	> 3600
Non-increasing									
10	3	75.40	30.20	0.00	1.25	89.40	30.20	0.00	0.83
10	5	71.40	20.95	0.00	0.93	65.40	20.95	0.00	0.62
15	4	343.60	26.94	0.00	9.09	371.40	26.94	0.00	7.33
15	8	882.20	21.49	0.00	12.33	666.60	21.49	0.00	8.20
20	5	3225.00	32.59	0.00	137.71	3153.80	32.59	0.00	101.18
20	10	10139.80	27.36	0.00	274.99	8262.60	27.36	0.00	183.55

جدول 3 : سری دوم نمونه ها به همراه هزینه و جریان

N	p	3-Index formulation				Covering 3-index formulation			
		Nodes	R-GAP	GAP	Time	Nodes	R-GAP	GAP	Time
Center									
10	3	5629.40	27.38	0.00	12.73	1106.40	27.35	0.00	7.19
10	5	9450.80	26.81	0.00	20.36	794.20	26.81	0.00	5.38
15	4	256355.20	34.45	0.48	1344.37	30681.60	34.45	0.00	339.48
15	8	459198.20	37.00	1.36	2688.13*	112346.40	36.98	0.00	743.97
20	5	185962.60	40.28	19.55	> 3600	121978.00	34.63	14.52	> 3600
20	10	165672.60	33.32	17.69	> 3600	178061.40	39.29	14.29	> 3600
k-Centrum									
10	3	4473.80	33.59	0.00	11.16	1021.40	33.59	0.00	5.65
10	5	1436.20	26.55	0.00	6.61	239.80	26.55	0.00	2.35
15	4	279503.00	41.55	0.00	1331.24	33547.20	41.55	0.00	319.93
15	8	68444.40	32.36	0.00	514.79	5528.60	32.36	0.00	80.50
20	5	191195.80	52.40	34.50	> 3600	153636.20	40.53	15.53	> 3600
20	10	123926.60	35.51	10.55	> 3600	86029.60	34.67	1.30	2136.19*
Median									
10	3	679.80	25.97	0.00	3.23	485.40	25.97	0.00	3.53
10	5	232.00	16.05	0.00	1.87	235.00	16.05	0.00	1.89
15	4	8573.80	31.23	0.00	74.27	27922.00	31.23	0.00	258.37
15	8	2955.40	26.64	0.00	37.50	2450.60	26.64	0.00	40.45
20	5	127737.20	36.26	9.24	3089.65*	126135.60	35.14	7.37	3006.37*
20	10	23267.20	28.49	0.00	960.57	52692.00	28.49	0.00	880.28
Trimmed mean									
10	3	727.40	29.38	0.01	3.94	252.40	29.38	0.00	2.77
10	5	139.00	18.88	0.01	2.57	98.20	18.88	0.00	1.93
15	4	17202.00	32.50	0.00	110.28	10487.20	32.50	0.00	100.20
15	8	1713.80	26.55	0.00	33.49	1085.80	26.55	0.00	22.87
20	5	229109.40	36.08	1.33	> 3600	121019.20	35.82	2.11	2301.74
20	10	30722.00	29.68	0.00	1109.77	16320.00	29.68	0.00	455.58
Anti-trimmed mean									
10	3	5445.20	36.13	0.00	11.78	1220.60	36.13	0.00	7.24
10	5	8580.20	34.42	0.00	18.28	763.80	34.42	0.00	4.56
15	4	328888.74	42.50	1.55	2069.58*	39290.40	42.25	0.00	380.00
15	8	447332.60	37.83	1.57	2697.39*	15652.40	37.83	0.00	139.11
20	5	199909.20	45.19	25.36	> 3600	129636.40	38.04	12.30	> 3600
20	10	165004.80	38.72	19.91	> 3600	179333.60	37.23	11.09	> 3600
Non-increasing									
10	3	48.60	26.16	0.00	1.01	46.60	26.16	0.00	0.67
10	5	41.80	19.82	0.00	1.28	41.40	19.82	0.00	0.61
15	4	668.60	37.08	0.00	13.69	637.80	37.08	0.00	10.51
15	8	881.40	30.05	0.00	14.27	795.00	30.05	0.00	10.30
20	5	4867.00	35.58	0.00	202.48	5525.40	35.58	0.00	171.03
20	10	13831.80	31.21	0.00	366.12	11827.00	31.21	0.00	302.44

این قضیه را می توان با توجه به رفتار متغیر های سه شاخصه پوششی در نمونه های جدول 2 مشاهده کرد که تعداد تکرار بیشتر از نمونه های جدول 3 بوده و در نتیجه مقدار G کمتر خواهد بود. در واقع می توان گفت زمانی که G

کاهش یابد شرایط بهتر خواهد شد. توجه داشته باشید که در این رابطه تعداد متغیرها و قیدها به G وابسته می باشند. (تعداد متغیرها و قید ها برای متغیرهای سه شاخصه برابر با N^3 و N^3+N^2+7N+1 می باشد در حالی که برای متغیر های پوششی برابر با N^2+NG و $N^3+N^2+(N+1)G$ خواهد بود. جدول 5 مشاهده شود.) با مشاهده GAP در گره ریشه مشخص می شود که در هر دو رابطه این میزان در گره یکسان خواهد بود.

به علاوه جداول 2 و 3 نشان می دهند که برای بردار λ، با بزرگ تر شدن اندازه نمونه، زمان تحلیل افزایش می یابد. فرمول بندی سه شاخصه قادر به رسیدن به حالت بهینه برای نمونه هایی با سایز N=20 نمی باشد به جز حالتی که P=10 و λ به صورت غیر افزایشی باشد. انتخاب صحیح λ موجب ساده سازی مسئله خواهد شد. این تاثیر ناشی از این است که اجزاء λ متفاوت بوده و در نتیجه از انحطاط جلوگیری می شود. رفتار مشابهی نیز در رابطه سه شاخصه پوششی قابل مشاهده است. گرچه در این حالت مقادیر GAP بسیار کوچک تر هستند.

این آنالیز را برای α=۲. و ۸۴ =δ. نیز انجام دادیم که نتایج مشابهی به دست آمد. اگرچه این مدل نیاز به زمان بیشتری برای حل داشت. به علاوه به دلیل اینکه در این حالت هزینه انتقال بین هاب ها مقدار قابل توجهی می باشد،این است که تعداد مسیرهای عبوری از 2 هاب مختلف به میزان حدود 8 درصد افزایش خواهد یافت.

5- بهبودها

در این بخش به بهبود و تقویت روابط قبلی خواهیم پرداخت که فقط برای حالت غیرافزایشی λ ممکن بوده و در برخی موارد علاوه بر کاهش زمان حل، نتایج خوبی را نیز حاصل می کند. هدف از این بخش کاهش زمان حل به کمک روابط جدید می باشد.

5-1- رابطه جدید OT سه شاخصه

در این بخش به توضیح رابطه جدیدی خواهیم پرداخت که فقط در حالت λ افزایشی معتبر است.($0 = \lambda_0 \le \lambda_1 \le \cdots \le \lambda_N$). این رابطه اکثر مسایل قدیمی در زمینه موقعیت مکانی هاب را حل کرده و برای کاهش زمان حل مسئله بسیار مناسب می باشد. ابن شیوه توسط Ogryczak و Tamir پایه گذاری شد. از این رابطه به شکل زیر در مسئله میانی استفاده کردیم.

به کمک متغیرهای r_{jk} که در رابطه سه شاخصه پوششی تعریف شده اند، متغیرهای $v_j = W_j \sum_{k=1}^{N} c_{jk} r_{jk}$، را تعریف می کنیم. Q بیانگر حداکثر مقادیر v، و v_i نشان دهنده مقادیر در حالت غیر افزایشی می باشد.

برای هر مقدار q بین 1 و N، رابطه زیر را در بازه 0 و بی نهایت در نظر می گیریم.

$$f_q(z) := qz + \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \max\{0, v_j - z\}$$

این رابطه به صورت خطی با شیبی از q به N بوده که حداقل مقدار آن در شیب 0 یا زمانی است که مقدار شیب از حالت منفی به مثبت تغییر کند. برای مثال زمانی که Z برابر با q امین مقدار حداکثر بردار v باشد، مقدار حداقل f به صورت زیر خواهد بود.

$$f_q(v_{(q)}) = qv_{(q)} + \sum_{j=1}^{N} \max\{0, v_j - v_{(q)}\} = qv_{(q)} + \sum_{j=1}^{q} (v_{(j)} - v_{(q)}) = \sum_{j=1}^{q} v_{(j)}$$

همچنین عبارتی خطی به شکل زیر نیز خواهیم داشت.

$$\min\ qz_q + \sum_{i=1}^{N} D_{iq} \quad \text{s.t. } D_{iq} \geq 0 \ \ \forall i, \quad D_{iq} \geq v_j - z_q \ \ \forall j = 1, \ldots, N$$

در ادامه شاخص q را در متغیرهای D و Z اضافه می کنیم، زیرا می خواهیم مسئله را برای هر مقدار q از 1 تا n-1 حل کنیم و مقادیر v را در روابط به دست آوریم.

در نتیجه با در نظر گرفتن موارد بالا، معادله OT سه شاخصه به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{N} (\lambda_{N-i+1} - \lambda_{N-i}) \left(iz_i + \sum_{j=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} D_{ij} \right) \\
& + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} (\alpha c_{k\ell} + \delta c_{\ell m}) x_{k\ell m} \\
\text{s.t.} \quad & D_{ij} \geq \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} W_j c_{jk} r_{jk} - z_i, \quad \forall i, j = 1, \ldots, N \\
& D_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j = 1, \ldots, N \\
& z_i, \text{ unrestricted}, \quad \forall i = 1, \ldots, N \\
& \text{Constraints : (8)–(11), (14)–(17)} \\
& r_{jk}, y_k \in \{0,1\}, \quad x_{k\ell m} \geq 0, \ \forall i, j, k, \ell, m = 1, \ldots, N
\end{aligned}$$

5-2- تثبیت متغیر

در این بخش به توضیح برخی مراحل پردازش خواهیم پرداخت تا اندازه روابط سه شاخصه پوششی را کاهش دهیم. به دلیل تعریف متغیرها در این رابطه، می توان انتظار داشت که اکثر متغیرهای u در سمت راست ماتریس، در حالت بهینه حل دارای مقدار صفر خواهند بود. در واقع $u_{ih}=0$ نشان می دهد که i امین هزینه، کمتر یا مساوی c_h می باشد. می توان انتظار داشت که اگر مقدار i بزرگ و h کوچک باشد، $u_{ih}=1$ خواهد بود. به کمک این استراتژی، اگر برخی از این متغیرها ثابت شوند اندازه روابط کاهش می یابد. در این قسمت به توضیح مواردی می پردازیم که امکان ثابت کردن متغیرهایی مانند u را داشته باشند.

کاملا واضح است که اگر $c_{jj}=0, \forall j=1,\dots,N$ ، خواهیم داشت

$$u_{i1}=1, \quad \forall i=1,\dots,N$$
$$u_{i2}=0, \quad \forall i=1,\dots,p \qquad (20)$$

به علاوه اگر $W_j c_{jk} \neq 0$ و $j \neq k$ ، در نتیجه می توان نوشت

$$u_{i2}=1, \quad \forall i=p+1,\dots,N$$

5-2-1- ثابت کردن متغیرهای u به مقدار 1

برای ثابت کردن متغیرهای u در عدد 1 برای $h \in \{1,\dots,G\}$ ، با یک معادله کمکی سرو کار خواهیم داشت که تعداد موقعیت های هاب اولی را کاهش داده و موجب ارضاء معادله $W_j c_{jk} \leq c_{(h-1)}$ می شود که برابر با تعداد حداکثر متغیرهای u_{ih} خواهد بود.

اگر سایت مرجع j به هاب k وصل شده باشد، Z_{jk} برابر با 1 و در سایر موارد برابر با 0 خواهد بود.

با استفاده از این متغیرها رابطه به صورت زیر نوشته می شود.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & H1_h := \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} z_{jk} \\
\text{s.t.} \quad & z_{jk} c_{jk} \sum_{m=1}^{N} w_{jm} \le c_{(h-1)}, \quad \forall j,k = 1,\ldots,N \\
& \sum_{k=1}^{N} z_{jk} \le 1, \quad \forall j = 1,\ldots,N \\
& z_{jk} \le y_k, \quad \forall j,k = 1,\ldots,N \\
& \sum_{k=1}^{N} y_k \le p \\
& z_{jk}, y_k \in \{0,1\}, \quad j,k,m = 1,\ldots,N
\end{aligned}
$$

که اگر $H1_K$ مقدار بهینه مسئله بالا باشد، تعداد بخش های ارضاء کننده $W_j c_{jk} > c_{(h)}$ باید الزاما بزرگتر یا مساوی $N-H1_h+1$ در راه حل مورد استفاده باشد.

5-2-2- ثابت کردن متغیرهای u به 0

با استفاده از روشی مشابه بخش قبل، سعی کردیم که تا حد امکان متغیرهای u را برای $h \in \{1,\ldots,G\}$ در مقدار صفر ثابت کنیم. در این حالت با معادله کمکی سرو کار داریم که تعداد هاب های ارضاء کننده $W_j c_{jk} \ge c_{(h)}$ را افزایش دهد. در نتیجه

$$
\begin{aligned}
\max \quad & H2_h := \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} z_{jk} \\
\text{s.t.} \quad & c_{jk} \sum_{m=1}^{N} w_{jm} \ge z_{jk} c_{(h)}, \quad \forall j,k = 1,\ldots,N
\end{aligned}
$$

در نتیجه اگر $H2_h$ مقدار بهینه مسئله بالا باشد، h امین ستون از ماتریس u حداقل $N-H2_h$ تعداد صفر خواهد داشت. برای مثال در روابط پوششی سه شاخصه :

$$u_{ih} = 0, \quad \forall i = 1,\ldots,N-H2_h$$

5-3- نامساوی های معتبر

در ادامه به توضیح برخی نامساوی های معتبر که موجب بهبود روابط پوششی می شوند خواهیم پرداخت. ابتدا گروهی از این نامساوی ها را که به صورت پیوسته موجب تغییر. متغیرهای u می شوند ارایه خواهیم کرد.

$$u_{ih} \geq u_{ih+1}, \quad h = 1, \ldots, G-1 \qquad (21)$$

جدول 4 : اولین دسته نمومه ها به همراه هزینه و جریان

N	p	OT-3-index				Pre-covering 3-index				
		Nodes	R-GAP	GAP	Time	Nodes	R-GAP	GAP	Time	Fixed var.
Center										
10	3	73.00	22.29	0.00	0.41	220.20	21.97	0.00	3.20	39.94
10	5	102.60	17.02	0.00	0.43	176.60	15.00	0.00	2.22	48.59
15	4	771.40	24.84	0.00	6.75	2324.80	25.27	0.00	67.01	33.60
15	8	1291.40	25.49	0.00	8.11	2797.80	25.19	0.00	41.68	51.45
20	5	4162.20	26.32	0.00	69.52	12074.00	27.26	0.00	770.49	31.51
20	10	11323.60	28.41	0.00	139.44	26828.80	28.58	0.00	858.51	49.01
k-Centrum										
10	3	164.20	31.40	0.00	0.39	196.60	25.46	0.00	2.16	38.65
10	5	61.00	19.66	0.00	0.32	63.00	15.08	0.00	0.91	48.76
15	4	651.40	33.44	0.00	5.40	1966.60	28.89	0.00	47.84	34.42
15	8	692.20	25.27	0.00	4.82	768.20	21.88	0.00	13.19	51.07
20	5	7362.20	39.86	0.00	108.15	30714.00	36.09	0.00	1501.95	31.26
20	10	8593.80	29.55	0.00	110.90	7767.20	27.53	0.00	237.74	48.58
Median										
10	3	32.60	20.44	0.00	0.25	59.00	18.91	0.00	1.16	37.11
10	5	43.00	15.87	0.00	0.26	55.80	15.66	0.00	1.05	48.44
15	4	753.40	28.24	0.00	5.62	1624.40	27.05	0.00	33.15	33.68
15	8	775.40	23.11	0.00	5.27	1080.20	22.93	0.00	18.07	51.42
20	5	6301.40	33.60	0.00	84.94	12204.40	31.81	0.00	581.18	25.83
20	10	11705.80	27.01	0.00	142.53	13672.20	26.95	0.00	378.88	48.81
Trimmed mean										
10	3					85.80	20.24	0.00	1.18	37.65
10	5					58.20	16.20	0.00	0.95	48.60
15	4					1024.20	25.87	0.00	22.76	33.48
15	8					772.60	23.47	0.00	13.85	51.55
20	5					5444.00	30.33	0.00	236.80	30.95
20	10					7022.60	27.08	0.00	207.12	48.68
Anti-trimmed mean										
10	3					328.60	27.05	0.00	3.53	37.35
10	5					207.40	22.96	0.00	1.98	48.55
15	4					2816.20	24.96	0.00	67.72	33.75
15	8					2733.40	24.56	0.00	36.49	51.03
20	5					31927.60	31.13	0.00	1546.92	31.52
20	10					46558.60	30.56	0.00	1376.21	48.87
Non-increasing										
10	3					86.20	27.98	0.00	0.77	37.27
10	5					58.60	20.65	0.00	0.60	47.73
15	4					335.80	25.92	0.00	7.24	33.01
15	8					676.60	21.40	0.00	8.67	51.54
20	5					3437.40	31.44	0.00	110.97	31.22
20	10					8733.40	27.36	0.00	196.60	48.63

توجه داشته باشید که معادله 21 بیانگر هزینه ch خواهد بود، در نتیجه برای هزینه های اشاره. شده در بالا استفاده نخواهد شد. بر اساس این نامساوی ها و استفاده از معادله 20 می توان متغیر های زیر را در صفر ثابت کرد.

$$u_{ih} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, p, \; h = 2, \ldots, G \qquad (22)$$

آخرین گروه این نامساوی ها بیانگر هزینه تخصیصی به اولین هاب مرجع خواهد بود. (1) اگر هیچ هابی برای تخصیص سایت مرجع j با هزینه کمتر از ch وجود نداشته باشد، سایت مرجع باید به اولین هاب احتصاص داده شود. (2) اگر سایت مرجع هزینه ای برابر با ch داشته باشد حداقل یک هاب باید رابطه $W_j c_{jk} < c_{(h)}$ را ارضا کند.

$$\sum_{k=1:W_j c_{jk} \ge c_{(h)}}^{N} r_{jk} + \sum_{k=1:W_j c_{jk} < c_{(h)}}^{N} y_k \ge 1, \quad \forall j=1,\dots,N,\ h=1,\dots,G \tag{23}$$

جدول 5 : دومین گروه نمونه ها به همراه هزینه و جریان

N	p	OT-3-index Nodes	R-GAP	GAP	Time	Pre-covering 3-index Nodes	R-GAP	GAP	Time	Fixed var.
Center										
10	3	57.00	22.25	0.00	0.39	218.60	20.85	0.00	3.46	38.99
10	5	81.40	20.94	0.00	0.41	147.00	20.24	0.00	2.31	49.15
15	4	444.20	29.96	0.00	4.86	1362.20	31.08	0.00	59.83	33.82
15	8	2165.00	33.42	0.00	12.67	4058.80	33.18	0.00	66.98	51.53
20	5	2329.80	29.73	0.00	45.05	10140.40	30.96	0.00	845.07	31.17
20	10	119922.00	35.29	5.78	2276.80	30918.20	35.56	0.00	1164.23	48.97
k-Centrum										
10	3	55.00	30.30	0.00	0.40	82.60	25.71	0.00	1.72	37.80
10	5	66.60	22.42	0.00	0.37	82.60	19.33	0.00	1.01	49.51
15	4	700.20	38.23	0.00	5.70	2182.40	35.27	0.00	73.92	33.44
15	8	742.20	29.44	0.00	5.49	820.20	26.87	0.00	16.72	51.69
20	5	3939.80	36.97	0.00	67.88	18786.40	33.77	0.00	1126.53	31.33
20	10	43973.40	32.71	1.01	823.28	10091.20	30.52	0.00	317.69	49.15
Median										
10	3	65.00	25.97	0.00	0.31	99.00	23.36	0.00	1.63	37.93
10	5	55.80	16.05	0.00	0.29	69.80	15.98	0.00	0.99	49.17
15	4	449.00	31.23	0.00	3.88	1439.00	29.47	0.00	36.69	34.48
15	8	849.40	26.64	0.00	5.58	936.60	26.63	0.00	18.76	52.35
20	5	8691.00	33.32	0.00	142.01	13151.60	32.62	0.00	729.93	31.35
20	10	6856.60	28.49	0.00	84.95	9276.00	28.48	0.00	282.83	49.20
Trimmed mean										
10	3					80.20	25.51	0.00	1.48	37.34
10	5					64.20	16.86	0.00	1.02	48.88
15	4					719.40	29.09	0.00	20.45	33.82
15	8					581.00	24.83	0.00	12.82	51.95
20	5					5533.80	32.80	0.00	283.45	31.16
20	10					7870.60	28.44	0.00	272.70	49.24
Anti-trimmed mean										
10	3					545.40	29.67	0.00	4.70	38.44
10	5					265.00	28.49	0.00	2.32	48.91
15	4					2856.20	38.01	0.00	79.01	33.46
15	8					3555.00	33.43	0.00	50.04	51.98
20	5					22297.80	34.10	0.00	1255.70	31.42
20	10					56598.20	33.28	0.00	1551.59	49.45
Non-increasing										
10	3					69.00	24.09	0.00	0.81	38.51
10	5					52.20	19.57	0.00	0.62	49.25
15	4					621.40	35.29	0.00	11.05	34.29
15	8					943.80	30.05	0.00	11.69	52.18
20	5					4789.80	33.68	0.00	162.28	31.08
20	10					13228.40	31.21	0.00	307.14	49.33

با جایگزینی r و متغیرهای y در رابطه بالا نامساوی زیر حاصل می شود.

$$\sum_{k=1:W_j c_{jk} \ge c_{(h)}}^{N} y_k + \sum_{k=1:W_j c_{jk} < c_{(h)}}^{N} r_{jk} \ge 1, \quad \forall j=1,\dots,N,\ h=1,\dots,G \tag{24}$$

نامساوی های 21-24 به منظور پردازش متغیرهای بخش 5-2 در نظر گرفته شده اند تا با روابط قبلی مقایسه شوند. نتایج در بخش 6 گزارش شده اند.

6- مقایسه روابط بهبود یافته

در این بخش به مقایسه روابط پوششی سه شاخصه خواهیم پرداخت. همچنین به کمک موارد اشاره شده در بخش 5-2 و نامساوی های 5-3، روابط بهبود خواهند یافت. برای این آنالیز از الگوی بخش 4 استفاده می شود. دو دسته نمونه اشاره شده در بخش های قبلی و مسایل k مرکزی، میانی، k_1+k_2 ، معکوس k_1+k_2، و λ غیرافزایشی در نظر گرفته شده اند. به منظور ارایه نتایج، از ساختار اشاره شده در بخش 4 استفاده می شود. جداول 4 و 5 نتایج حاصل از دو دسته نمونه مورد استفاده را گزارش می کنند. هر جدول شامل سه بلوک ستونی می باشد. اولین بلوک نام مسئله و ابعاد نمونه ها را در بر دارد. دو بلوک بعدی نشان دهنده نتایج حاصل از روابط OT سه شاخصه و پوششی سه شاخصه می باشند. در هر بلوک اطلاعات مشابه جداول 2 و 3 اشاره آورده شده اند. میانگین تعداد گره ها، GAPدر گره ریشه، GAPنهایی و زمان cpu در واحد ثانیه اشاره شده اند. به علاوه در بلوک سوم درصد متغیرهای ثابت شده در روابط نیز آورده شده اند. توجه داشته باشید که بلوک های خالی در جداول 4 و 5 به این دلیل است که OT سه شاخصه برای حل مسئله قابل استفاده نمی باشد.

مشاهده می شود که هر دو رابطه از روابط قبلی موثرتر می باشند. برخی استثنائات نیز در مسئله با λ غیر افزایشی وجود دارد، گرچه در این موارد زمان cpu مشابه سایر گزینه ها خواهد بود. می توان با مقایسه زمان cpu در جداول 2 و 4 برای اولین گروه نمونه ها و جداول 3 و 5 برای دومین گروه نمونه ها به این نتیجه رسید.

جدول 6 : مقایسه روابط مختلف

	Constraints	Continuous variables	Integer variables
3-Index formulation	N^3+N^2+7N+1	$2N^3$	N^3
COV-3-index formulation	$N^3+N^2+(N+1)G+5N+1$	N^3+N^2+NG	N^2+NG
OT-3-index formulation	N^3+2N^2+5N+1	N^3+N^2+N	N^2+N

روابط OT سه شاخصه نتایج بسیار خوبی را برای اولین گروه نمونه ها (جدول 4) ارایه می کنند. در واقع حداکثر زمان میانگین برای 5 نمونه برابر با 142.53 ثانیه می باشد. با وجود اینکه روابط سه شاخصه را می توان در هر λ

اعمال کرد، در کل این روابط راضی کننده نمی باشند. در مورد گروه دوم نمونه ها، OT سه شاخصه تمام نمونه ها تا $N=15$ را حل کرده اما قادر به حل نمونه ها با $N=20$ و $p=10$نخواهد بود. با توجه به میزان GAP در گره ریشه، هیچ اختلاف قابل توجهی برای روابط با نمونه های مختلف مشاهده نمی شود. در این تحقیق نمونه های بزرگتر نیز بررسی شده اند. برای $N=23$، تعداد نمونه هایی که از ظرفیت حافظه خارج می شوند افزایش می یابد. نکته قابل توجه این است که برای $N=26$، تمامی نمونه ها در هر دو رابطه خارج از ظرفیت حافظه می باشند.

در نهایت در جدول 6، خلاصه ای از تعداد قیدها و تعداد متغیرهای پیوسته در روابط مختلف که در این مقاله اشاره شده اند آورده شده است. روابط سه شاخصه دارای حداقل تعداد قیدها می باشند اما این روابط دارای بیشترین تعداد متغیرهای پیوسته خواهند بود. در طرف مقابل روابط OT بیشترین قیدها را داشته اما دارای کمترین تعداد متغیرهای پیوسته می باشند.

7- نتیجه گیری

در این مقاله با چندین رابطه درمورد موقعیت هاب سر و کار داشتیمِ. همچنین بر روی موارد مدل سازی بحث کرده و نتایج تست ها را به کمک روابط مختلف ارایه کردیم. هدف از این نتایج بررسی محدودیت هایی مانند زمان حل با استفاده از مدل های مختلف و حل گر های MIP استاندارد می باشد. در نتیجه این مقاله نقطه شروعی برای توسعه روش های حل برای تمامی مدل های ارایه شده خواهد بود.

ضمیمه A

در این بخش نتایج ساختاری در مورد برنامه نوسیی خطی مسائل ارایه شده است. برخی قیدها که در حالت کلی برای رسیدن به رابطه ای معتبر مورد نیاز می باشند در این بخش آورده شده اند.

پیشنهاد 1A

اگر ساختار هزینه نامساوی مثلث را ارضا کند

الف) نامساوی 5 اضافی است

2) نامساوی 8 اضافی است

اثبات : ابتدا این دو حالت را از یکدیگر متمایز می کنیم. اگر $y_i=0$ باشد، نامساوی 5 از فرم 4 تبعیت می کند. اگر $y_j=1$ باشد، باید $\sum_{i=1}^{N} r_{ii}^{i}=1$ اثبات شود. اگر $r_{jj}^{i}=0$ برای تمامی $i=1,\ldots,N$ ، به کمک معادله 2 می توان گفت که شاخصی مانند $k^*(\neq j)$و $r_{jk^*}^{i}=1$ برای $k^*,\ell^*(m)$ وجود داشته باشد. برای هر سایت مقصد m، جریان jm باید از یکی از الگوهای $(j,k^*,\ell^*(m),m)$ یا (j,k^*,k^*,m)، پیروی کند. اولین مورد مسیری است که از دو هاب مختلف عبور می کند و دومین مورد مسیری است که از هاب k عبور خواهد کرد. در نتیجه می توان گفت این راه حل به صرفه تر می باشد. همچنین نامساوی زیر بایستی ارضا شود.

$$
\begin{aligned}
&\min\left\{\lambda_i c_{jk^*} W_j+\alpha\sum_{m=1}^{N} c_{k^*,\ell^*(m)} w_{jm}\right.\\
&\quad\left.+\delta\sum_{m=1}^{N} c_{\ell^*(m),m} w_{jm}, \lambda_i c_{jk^*} W_j+\delta\sum_{m=1}^{N} c_{k^*m} w_{jm}\right\}\\
&\quad<\min\left\{\min_{\ell(m)}\left\{0+\alpha\sum_{m=1}^{N} c_{j,\ell(m)} w_{jm}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\delta\sum_{m=1}^{N} c_{\ell(m),m} w_{jm}\right\}, 0+0+\delta\sum_{m=1}^{N} c_{jm} w_{jm}\right\}
\end{aligned}
$$

زمانی که نامساوی مثلث ارضا و $\alpha\leq\lambda_i$ برای هر $i=1,\ldots,N,$ صادق باشد می توان گفت:

$$
\begin{aligned}
&\min_{\ell(m)}\left\{\alpha\sum_{m=1}^{N} c_{j,\ell(m)} w_{jm}+\delta\sum_{m=1}^{N} c_{\ell(m),m} w_{jm}\right\}\\
&\quad\leq\alpha\sum_{m=1}^{N} c_{j,\ell^*(m)} w_{jm}+\delta\sum_{m=1}^{N} c_{\ell^*(m),m} w_{jm}\\
&\quad\leq\lambda_i c_{jk^*} W_j+\alpha\sum_{m=1}^{N} c_{k^*,\ell^*(m)} w_{jm}+\delta\sum_{m=1}^{N} c_{\ell^*(m),m} w_{jm}
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\min_{\ell(m)}\left\{\alpha\sum_{m=1}^{N} c_{j,\ell(m)} w_{jm}+\delta\sum_{m=1}^{N} c_{\ell(m),m} w_{jm}\right\}\\
&\quad\leq\alpha c_{jk^*} W_j+\delta\sum_{m=1}^{N} c_{k^*m} w_{jm}\leq\lambda_i c_{jk^*} W_j+\delta\sum_{m=1}^{N} c_{k^*m} w_{jm}
\end{aligned}
$$

اثبات مورد دوم دقیقا مشابه حالت اول می باشد و به همین دلیل در اینجا آوردهه نشده است.

جدول 7

N	p	Covering 3 index				Covering 3-index Proposition A.1			
		Nodes	R-GAP	GAP	Time	Nodes	R-GAP	GAP	Time
10	3	350.00	15.71	0.00	2.28	718.20	33.95	0.00	2.98
10	5	146.40	10.32	0.00	1.19	666.60	22.47	0.00	2.28
15	4	5357.80	14.79	0.00	56.73	109670.20	31.96	1.92	1005.76*
15	8	147.00	6.59	0.00	6.09	12921.80	13.61	0.00	76.63
20	5	46315.20	15.16	1.12	1643.18*	195142.80	31.90	15.56	> 3600
20	10	2810.00	5.89	0.00	112.17	282035.40	15.89	6.79	> 3600

همانند روابط سه شاخصه، پیشنهاد 1A برای روابط پوششی سه شاخصه نیز معتبر می باشد. در این حالت علاوه بر قیدهای 5 و 8، قیدهای 8 و 16 نیز در این دو رابطه اضافی می باشند. نتایج محاسباتی نشان می دهند که بهتر است این قیدها را به منظور کاهش زمان حل مسئله به مدل اعمال کنیم. در واقع جدول 7 نشان دهنده میانگین 5 نمونه از ترکیب های مختلف Nدر $\{10,15,20\}$، p وابسته به مقدار N و هزینه برای دسته ای از λ ها که در آن $[\delta+1,\delta+2]$, $\delta = 1.2\alpha$ و $\alpha = 0.7$ خواهد بود. با توجه به جدول 7 مشاهده می شود ستون R-GAP که نشان دهنده بخش خطی مسئله می باشد، با اضافه کردن نامعادلات 8 و 16 موجب کاهش GAP به میزان نصف خواهد شد. به علاوه تعداد میانگین گره ها در B&B برای روابط با قیدهای 8 و 16 به میزان قابل توجهی کمتر خواهد بود. پس می توان نتیجه گرفت که در تمامی موارد، موجب حل مسائل خواهد شد. اگر چه هر دو گروه قید ها اضافی می باشند، بهتر است از آنها به عنوان نامساوی های معتبر استفاده شود. این چنین رفتاری در قیدهای 5 و 8 نیز قابل مشاهده می باشد.

References

[1] Alumur S, Kara BY. Network hub location problems: the state of the art. European Journal of Operational Research 2008;190(1):1–21.
[2] Berman O, Kalcsics J, Krass D, Nickel S. The ordered gradual covering location problem on a network. Discrete Applied Mathematics 2009;157(18–28): 3689–707.
[3] Boland N, Domínguez-Marín P, Nickel S, Puerto J. Exact procedures for solving the discrete ordered median problem. Computers and Operations Research 2006;33:3270–300.
[4] Boland N, Krishnamoorthy M, Ernst AT, Ebery J. Preprocessing and cutting for multiple allocation hub location problems. European Journal of Operational Research 2004;155(3):638–53.
[5] Bollapragada R, Li Y, Rao US. Budget-constrained, capacitated hub location to maximize expected demand coverage in fixed-wireless telecommunication networks. INFORMS Journal on Computing 2006;18(4):422–32.
[6] Cánovas L, García S, Labbé M, Marín A. A strengthened formulation for the simple plant location problem with order. Operations Research Letters 2007;35(2):141–50.
[7] Cánovas L, García S, Marín A. Solving the uncapacitated multiple allocation hub location problem by means of a dual-ascent technique. European Journal of Operational Research 2007;179(3):990–1007.
[8] Campbell JF. Hub location and the *p*-hub median problem. Operations Research 1996;44(6):923–35.
[9] Campbell JF, Ernst A, Krishnamoorthy M. Hub location problems. In: Facility location. Berlin: Springer; 2002. p. 373–407.

[10] Campbell AM, Lowe TJ, Zhang L. The *p*-hub center allocation problem. European Journal of Operational Research 2007;176(2):819–35.
[11] Contreras I, Díaz JA, Fernández E. Lagrangian relaxation for the capacitated hub location problem with single assignment. OR Spectrum 2009;31(3): 483–505.
[12] Elloumi S, Labbé M, Pochet Y. A new formulation and resolution method for the *p*-center problem. INFORMS Journal on Computing 2004;16(1):84–94.
[13] Ernst AT, Krishnamoorthy M. Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation *p*-hub median problem. Location Science 1996;4(3):139–54.
[14] Ernst AT, Krishnamoorthy M. Solution algorithms for the capacitated single allocation hub location problem. Annals of Operations Research 1999;86: 141–59.
[15] Espejo I, Marín A, Puerto J, Rodríguez-Chía AM. A comparison of formulations and solution methods for the minimum-envy location problem. Computers and Operations Research 2009;36:1966–81.
[16] Fonseca MC, García-Sánchez A, Ortega-Mier M, Saldanha-da-Gama F. A stochastic bi-objective location model for strategic reverse logistics. TOP 2010;18(1):158–84.
[17] Hamacher H, Labbé M, Nickel S, Sonneborn T. Adapting polyhedral properties from facility to hub location problems. Discrete Applied Mathematics 2004;145(1):104–16.
[18] Kalcsics J, Nickel S, Puerto J, Rodríguez-Chía AM. Distribution systems design with role dependent objectives. European Journal of Operational Research 2010;202:491–501.
[19] Kalcsics J, Nickel S, Puerto J, Rodríguez-Chía AM. The ordered capacitated facility location problem. TOP 2009;18(1):203–22.
[20] Kara BY, Tansel BC. On the single-assignment *p*-hub center problem. European Journal of Operational Research 2000;125(3):648–55.
[21] Kara BY, Tansel BC. The single-assignment hub covering problem: models and linearizations. Journal of the Operational Research Society 2003;54(1):59–64.
[22] Kolen A. Solving covering problems and the uncapacitated plant location problem on trees. European Journal of Operational Research 1983;12(3): 266–78.
[23] Kratica J, Stanimirovic Z. Solving the uncapacitated multiple allocation p-hub center problem by genetic algorithm. Asia-Pacific Journal of Operational Research 2006;23(4):425–37.
[24] Labbé M, Yaman H. Projecting the flow variables for hub location problems. Networks 2004;44(2):84–93.
[25] Labbé M, Yaman H. Solving the hub location problem in a star-star network. Networks 2008;51(1):19–33.
[26] Labbé M, Yaman H, Gourdin E. A branch and cut algorithm for hub location problems with single assignment. Mathematical Programming 2005;102(2): 371–405.
[27] Marín A. Formulating and solving splittable capacitated multiple allocation hub location problems. Computers and Operations Research 2005;32(12): 3093–109.
[28] Marín A. Uncapacitated Euclidean hub location: strengthened formulation, new facets and a relax-and-cut algorithm. Journal of Global Optimization 2005;33(3):393–422.
[29] Marín A, Cánovas L, Landete M. New formulations for the uncapacitated multiple allocation hub location problem. European Journal of Operational Research 2006;172(1):274–92.
[30] Marín A, Nickel S, Puerto J, Velten S. A flexible model and efficient solution strategies for discrete location problems. Discrete Applied Mathematics 2009;157(5):1128–45.
[31] Meyer T, Ernst AT, Krishnamoorthy M. A 2-phase algorithm for solving the single allocation p-hub center problem. Computers and Operations Research 2009;36(12):3143–51.
[32] Nickel S, Puerto J. Location theory—a unified approach. Springer; 2005.
[33] Ogryczak W, Tamir A. Minimizing the sum of the *k* largest functions in linear time. Information Processing Letters 2003;85:117–22.
[34] O'Kelly ME. A quadratic integer problem for the location of interacting hub facilities. European Journal of Operational Research 1987;32:393–404.
[35] Puerto J, Fernández FR. Geometrical properties of the symmetrical single facility location problem. Journal of Nonlinear and Convex Analysis 2000;1(3):321–42.

[36] Rodríguez-Chía AM, Nickel S, Puerto J, Fernández FR. A flexible approach to location problems. Mathematical Methods of Operations Research 2000;51: 69–89.
[37] Rodríguez-Martín I, Salazar-González JJ. Solving a capacitated hub location problem. European Journal of Operational Research 2008;184(2): 468–79.
[38] Tan PZ, Kara BY. A hub covering model for cargo delivery systems. Networks 2007;49(1):28–39.

[39] Wagner B. Model formulations for hub covering problems. Journal of the Operational Research Society 2008;59(7):932–8.
[40] Yaman H. Polyhedral analysis for the uncapacitated hub location problem with modular arc capacities. SIAM Journal on Discrete Mathematics 2005; 19(2):501–22.
[41] Zhou G, Min H, Gen M. The balanced allocation of customers to multiple distribution centers in a supply chain network: a genetic algorithm approach. Computers and Industrial Engineering 2002;43:251–61.