مدل برنامه نویسی خطی چند معیاری برای انتخاب نمونه کارها

مسئله انتخاب نمونه کارها معمولاً به عنوان مسئله بهینه سازی دومعیاری در نظرگرفته می شود که در آن یک سبک سنگین کردن معقول بین نرخ مورد انتظار بازگشت و ریسک مورد جستجو قرار می گیرد. در مدل کلاسیک مارکووویتز، ریسک با واریانس اندازه گیری و در نتیجه یک مدل برنامه نویسی درجه دوم تولید می شود. مدل مارکووویتز غالباً به این عنوان که با مدل های بدیهی ترجیحات برای انتخاب تحت ریسک سازگار نیست، مورد انتقاد قرار می گیرد. مدل های سازگار با حقایق ترجیح مبتنی بر رابطه غلبه تئوری مطلوبیت مورد انتظار است. پیاده سازی مورد اول برای مقایسه های جفتی نمونه کارها معین ساده است در حالیکه هر ابزار محاسباتی را برای تحلیل مسئله انتخاب نمونه کارها ارائه نمی دهد. مورد دوم زمانی که برای مسئله انتخاب نمونه کارها استفاده شود، در ترجیحات مدلسازی سرمایه گذاران، محدود است. در این مقاله، یک مدل برنامه نویسی خطی چندمعیاری مسئله انتخاب نمونه کارها توسعه می یابد. این مدل بر اساس حقایق ترجیح برای انتخاب تحت ریسک است. هرچند، یکی را برای به کارگیری رویه های معیارهای چنداستانداردی برای تحلیل مسئله انتخاب نمونه کارها میسر می سازد. نشان داده شده است که رویکردهای کلاسیک متوسط ریسک حاصل در مدل های برنامه نویسی خطی متناظر با تکنیک های راه حل خاص اعمال شده برای مدل چند معیاری ما است.

کلمات کلیدی: انتخاب نمونه کارها، چندمعیاری، برنامه نویسیس خطی، تساوی حقوق

1. مقدمه

مسئله انتخاب نمونه کارها در نظر گرفته شده، بر مبنای مدل دوره تک سرمایه گذاری است. در آغاز این دوره، سرمایه گذار، سرمایه را در میان اوراق قرضه مختلف تخصیص می دهد، وزن غیرمنفی را به هر اوراق قرضه منصوب می نماید. در مدت این دوره، هر اوراق، یک نرخ تصادفی را برای بازگشت تولید می کند به طوری که در انتهای دوره، سرمایه توسط متوسط وزندهی شده بازگشت ها تغییر می یابد. در انتخاب وزن های اوراق، سرمایه گذار با مجموعه ای از محدودیت های خطی روبرو می شود که یکی از آنها اینست که مجموع وزن ها باید برابر 1 شود.

پیرو کار اولیه توسط مارکوویتز [12]، مسئله انتخاب نمونه کار معمولاً به صورت مسئله بهینه سازی دو معیاری مدلسازی می شود که در آن سبک سنگین کردن بین نرخ مورد انتظار بازگشت و ریسک مورد جستجو قرار می گیرد. مدل مارکووویتز غالباً به این عنوان که با مدل های بدیهی ترجیحات برای انتخاب تحت ریسک سازگار نیست، مورد انتقاد قرار می گیرد (Bell و Raiffa [1]). مدل های سازگار با حقایق ترجیح مبتنی بر رابطه سلطه تصادفی یا تئوری مطلوبیت مورد انتظار هستند (Levy [9]). پیاده سازی مورد اول برای مقایسه های جفتی در نمونه کارها معین آسان است در حالیکه هر دریافت محاسباتی را برای تحلیل مسئله انتخاب نمونه کارها ارائه نمی دهد. مورد دوم زمانی که برای مسئله انتخاب نمونه کارها استفاده شود، در ترجیحات مدلسازی سرمایه گذران، محدودکننده است.

در مدل مارکوویتز کلاسیک، ریسک با واریانس اندازه گیری می شود و یک مدل برنامه نویشی درجه دوم را تولید می کند. پیرو Sharpe [18]، بسیاری از تلاش ها برای خطی سازی مسئله انتخاب نمونه کارها انجام شده است (cf Speranza [19] و مراجع در آن). در این مقاله ما یک مدل برنامه نویسی خطی چندمعیاری را برای مسئله انتخاب نمونه کارها کلاسیک توسعه می دهیم که در آن مجموعه ای متناهی از اوراق قرضه در نظر گرفته می شود و برای هر اوراق، بازگشت مورد انتظار با توزیع گسسته متناهی تعریف می شود (مثلاً توسط داده های تاریخی). این مدل بر اساس حقایق ترجیح برای انتخاب تحت ریسک است.

در نظر بگیرید که $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ نشاندهنده مجموعه ای از اوراق قرضه باشد که در آن هدف سرمایه گذاری روی یک سرمایه است. ما معمولاً فرض می کنیم که برای هر اوراق قرضه $j \in J$ یک بردار داده معین $(r_{ij})_{i=1,2,\ldots,m}$، وجود دارد که در آن rij، نرخ مشاهده شده (یا پیش بینی شده) برای بازگشت در رخداد (زمان) i برای اوراق j (که به عنوان نتیجه ارجاع می شود) است. بنابراین ما توزیعات گسسته را برای بازگشت تعریف شده به صورت قرعه کشی های m بعدی یعنی توسط بردارهای m نتیجه متناظر با بهرهای $i \in I = \{1, 2, \ldots, m\}$ در نظر می گیریم. داده ها یک ماتریس m*n $\mathbf{R} = (r_{ij})_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n}$ را تشکیل می دهند که ستونها متناظر با اوراق است در حالیکه سطرها $\mathbf{r}_i = (r_{ij})_{j=1,2,\ldots,n}$ متناظر با نتایج است. علاوه براین، در نظر بگیرید که $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1,2,\ldots,n}$ نشاندهنده بردار متغیرهای تصمیم گیری (وزن های اوراق قرضه)برای تعریف یک نمونه کار باشد. برای نمایش یک نمونه کار، متغیرهای تصمیم گیری باید مجموعه ای از محدودیت ها را که مجموعه عملی Q را تعریف می کند برآورده سازد. ساده ترین مجموعه توسط این الزام تعریف می شود که متغیرهای تصمیم باید در مجموع برابر 1 شوند یعنی

$$Q = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}}\colon \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j \geqslant 0 \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

سرمایه گذار معمولاً با مجموعه ای از محدودیت های جانبی اضافی روبرو می شود. بعد از آن، ما فرض می کنیم که Q یک مجموعه عملی LP کلی در شکل کانونی به عنوان یک سیستم از معادلات خطی با متغیرهای غیرمنفی است

$$Q = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}}\colon\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}, \qquad (1)$$

که در آن A یک ماتریس p*n معین و $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_p)^{\mathrm{T}}$ یک بردار RHS معین است. بعد از آن ما این بردار $\mathbf{x} \in Q$ را یک نمونه کار می نامیم.

1 در این مقاله ما از دستور زیر برای عدم برابری های برداری استفاده می کنیم.

$$\mathbf{x}' \geqq \mathbf{x}'' \Leftrightarrow x'_j \geqslant x''_j \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\mathbf{x}' \geqslant \mathbf{x}'' \Leftrightarrow (\mathbf{x}' \geqq \mathbf{x}'' \text{ and } \mathbf{x}'' \ngeqq \mathbf{x}'),$$
$$\mathbf{x}' > \mathbf{x}'' \Leftrightarrow x'_j > x''_j \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n.$$

هر بردار x، یک بردار از نتایج $\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x} = (\mathbf{r}_1\mathbf{x}, \mathbf{r}_2\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{r}_m\mathbf{x}).$ را تولید می کند. بردارهای y که به آن بردارهای دستیابی به آن اشاره می کنیم. یک بردار دستیابی y در صورتی قابل دست یافتن است که نتایج یک نمونه کار $\mathbf{x} \in Q$ (i.e., $\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x}$ for some $\mathbf{x} \in Q$). را بیان می کند.

مسئله انتخاب نمونه کار می تواند به عنوان مسئله بهینه سازی با m تابع هدف یکنواخت $f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{r}_i\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_j$ در نظر گرفته می شود. در شکل برداری، می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\max\{\mathbf{R}\mathbf{x}:\ \mathbf{x} \in Q\}, \quad (2)$$

که در آن Q نشاندهنده مجموعه عملی (1) است. مدل (2) تنها مشخص می کند که ما علاقه مند به تمام توابع هدف هستیم. به منظور عملیاتی سازی آن، نیاز به فرض برخی از مفاهیم راه حل وجود دارد که مشخص می کند که چه استفاده ای برای ماکزیمم نمودن چند تابع هدف دارد. بهینه سازی معیارهای چندگانه استاندارد با یک این فرض آغاز می شود که این معیارها غیرقابل مقایسه هستند. این منجر به مفهوم راه حل های کارامد می شود (پارتو-بهینه). در مسئله انتخاب نمونه کار، توابع هدف، یکنواخت هستند و مقادیر آن ها می تواند به طور مستقیم مقایسه شود. در حقیقت، ما علاقه مند به مقایسه توزیعات نتایج در بردارهای دستیابی هستیم نه خود بردارهای دستیابی. علاوه بر این، یک مفهوم راه حل باید ناسازگاری ریسک را در نظر بگیرید. بنابراین، مدل (2) نمی تواند یک مسئله بهینه سازی چندمعیاری استاندارد در نظر گرفته شود. هرچند، با استفاده از نتایج مرتبط با مرتبه بندی بردارهای دستیابی و چندین ایده مرتبط، دستیابی به مسئله بهینه سازی چندمعیاری خطی که در یک نقش جانشین به کارگیری می شود ممکن است. یعنی، توسط جستجوی راه حل برای این مسئله جدید، ما جواب هایی را برای مسئله انتخاب نمونه کار (2) می یابیم که با توجه به ترجیحات مخالف ریسک مختلف سازگار با حقایق استاندارد برای انتخاب تحت

ریسک بهینه است. این کار، به کارگیری رویه های معیارهای چندگانه استاندارد را برای حل مسئله انتخاب نمونه کار میسر می سازد.

این مقاله به شرح زیر سازماندهی می شود. در بخش بعدی، از حقایق استاندارد برای انتخاب تحت ریسک برای تعریف مفهوم راه حل در راه حل های کارآمد برابر برای مسئله انتخاب نمونه کار (2). استفاده می کنیم. ما یک مدل چندمعیاری خطی را می سازیم به طوری که راه حل های آن کارامد آن با راه حل های معادل برابر مسئله انتخاب نمونه کار برخورد دارد. در بخش 3، ما رویکردهای میانگین-ریسک کلاسیک را تجزیه و تحلیل می کنیم که منجر به مدل های برنامه نویسی خطی برای مسئله انتخاب نمونه کار می شود. ما نشان می دهیم که آنها می توانند به عنوان تکنیک های راه حل خاص اعمال شده برای مدل چندمعیاری ما دیده شود. علاوه بر این، در بخش 4، ما رویکرد وزندهی مرتبه بندی شده را تجزیه و تحلیل می کنیم که توسط آن تغییر وزنها، شناسایی هر راه حل کارآمد برابر با مسئله انتخاب نمونه کار (2) را میسر می سازد. این رویکرد منجر به مسائل برنامه نویسی خطی با تعداد زیادی از محدودیت ها می شود. هرچند، همانطور که در بخش 5 نشان داده شده است، مسائل دوگانه متناظر می تواند به طور موثر توسط روش ساده با تکنیک تولید ستونی حل شود.

2. مدل

مفاهیم راه حل توسط ویژگی های مدل ترجیح متناظر تعریف می شوند. ما فرض می کنیم که مفاهیم راه حل تنها وابسته به ارزیابی دستیابی بردارها (نتایج) است در حالیکه هر ویژگی راه حل دیگر را در بردارهای دستیابی نمایش داده نشده در نظر نمی گیرد. بنابراین ما می توانیم ملاحظات خود را به مدل ترجیح در فضای بردارهای دستیابی محدود نماییم. مدل ترجیح به طور کامل توسط رابطه ترجیح ضعیف (Vinckle [21]) مشخص می شود، که بعد از این با $\succeq$. نمایش داده می شود. مثلاً، روابط متناظر ترجیح محدود $\succ$ و عدم تفاوت $\cong$ توسط فرمول های زیر تعریف می شوند:

$$\mathbf{y}' \succ \mathbf{y}'' \Leftrightarrow (\mathbf{y}' \succeq \mathbf{y}'' \text{ and } \mathbf{y}'' \not\succeq \mathbf{y}'),$$
$$\mathbf{y}' \cong \mathbf{y}'' \Leftrightarrow (\mathbf{y}' \succeq \mathbf{y}'' \text{ and } \mathbf{y}'' \succeq \mathbf{y}').$$

مدل ترجیح استاندارد مرتبط با مفهوم راه حل پارتو-بهینه فرض می کند که رابطه ترجیح $\succeq$ انعکاسی است:

$$\mathbf{y} \succeq \mathbf{y}, \quad (3)$$

گذاری

$$(\mathbf{y}' \succeq \mathbf{y}'' \text{ and } \mathbf{y}'' \succeq \mathbf{y}''') \Rightarrow \mathbf{y}' \succeq \mathbf{y}''', \quad (4)$$

و شدیداً مونوتونیک

$$\mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{e}_i \succ \mathbf{y} \quad \text{for } \varepsilon > 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \quad (5)$$

که در آن ei نمایش دهنده بردار واحد iام در فضای معیار است. آخری فرض بیان می کند که برای هر تابع هدف فردی، بهتر است (ماکزیمم نمودن). روابط اولویت که بدیهیات (3)-(5) را برآورده می سازد، بعد از این به عنوان روابط اولویت منطقی نامیده می شوند. روابط اولویت منطقی به ما اجازه می دهد تا مفهوم راه حل بهینه پاراتو را با تعاریق زیر رسمی نماییم. ما می گوییم که بردار دستیابی y′ به طور منطقی بر $\mathbf{y}''$ $(\mathbf{y}' \succ_r \mathbf{y}'')$, غلبه دارد، $\text{iff } \mathbf{y}' \succ \mathbf{y}''$ برای تمام روابط اولویت منطقی $\succeq$. ما می گوییم که راه حل عملی $\mathbf{x} \in Q$ یک راه حل کارآمد (بهینه پارتو) برای مسئله معیارهای چندگانه (2) است، $\text{iff } \mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x}$ به طو رمنطقی غالب نیست.

رابطه غلبه منطقی ضعیف $\succeq_r$ می تواند بر حسب نامعادله برداری بیان شود

$$\mathbf{y}' \succeq_r \mathbf{y}'' \Leftrightarrow \mathbf{y}' \geqq \mathbf{y}''.$$

به عنوان یک نتیجه، ما می توانیم بیان کنیم که راه حل عملی $\mathbf{x}^0 \in Q$ یک راه حل کارآمد برای مسئله معیارهای چندگانه (2) است، اگر و تنها اگر $\mathbf{x} \in Q$ وجود نداشته باشد به طوری که $\mathbf{R}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{R}\mathbf{x}^0$، . اخرین

مورد اشاره به تعریف رایج استفاده شده برای راه حل های کارآمد به عنوان راه حل های عملی اشاره دارد که برای آن نمی توان هر معیار را بدون بدتر شدن دیگری بهبود داد (Chankong and Haimes [2], Steuer [20]).

هرچند، تعریف بدیهی رابطه اولویت منطقی به ما اجازه می دهد تا ویژگی های اضافی را برای اولویتات مرتبط با اصول انتخاب تحت ریسک معرفی نماییم.

در حالیکه با میعارهای یکنواخت برخورد می کنیم، فرض می کنیم که مدل اولویت بی طرف (متقارن، بی نام) است یعنی

$$(y_{\tau(1)}, y_{\tau(2)}, \ldots, y_{\tau(m)}) \cong (y_1, y_2, \ldots, y_m) \qquad (6)$$

برای هر جایگشت τ از I. علاوه بر این، با در نظر گرفتن اینکه سرمایه گذار مخالف ریسک است، مدل اولویت باید اصل Pigou دالتون از نقل و انتقالات را برآورده سازد. اصل از نقل و انتقالات می گوید که انتقال مقدار کمی از یک نتیجه به هر نتیجه نسبتا بدتر منتج به یک بردار موفقیت بیشتر ترجیح داده شده می شود، به عنوان مثال،

$$y_{i'} > y_{i''} \Rightarrow \mathbf{y} - \varepsilon \mathbf{e}_{i'} + \varepsilon \mathbf{e}_{i''} \succ \mathbf{y} \quad \text{for } 0 < \varepsilon < y_{i'} - y_{i''},\ i', i'' \in I. \qquad (7)$$

روابط اولویت که تمام بدیهیات (3) - (7) را برآورده می سازد، را از این به بعد، روابط اولویت منطقی منصفانه می نامیم.

نیاز به بی طرفی (6) و اصل نقل و انتقالات (7) با بدیهیات های معیارهای بهینه سازی متعدد تناقض ندارد (3) - (5). بنابراین، ما می توانیم بهینه سازی منصفانه معیارهای چندگانه را (Ogryczak [14])بر اساس مدل رجحان تعریف شده توسط بدیهیات (3) - (7) در نظر بگیریم. روابط عادلانه اولویت منطقی به ما اجازه می دهد تا مفهوم راه حل عادلانه کارآمد را شبیه به راه حل استاندارد کارآمد (پارتو مطلوب) با روابط اولویت منطقی تعریف نماییم. ما می گوییم که بردار دستاورد y′ عادلانه بر $\mathbf{y}''\ (\mathbf{y}' \succ_e \mathbf{y}'')$, iff $\mathbf{y}' \succ \mathbf{y}''$ غالب است، برای همه روابط اولویت منطقی عادلانه $\succeq$. ما می گوییم که یک نمونه کار (راه حل عملی) $\mathbf{x} \in Q$ عادلانه و کارآمد

است (یک راه حل عادلانه و کارآمد برای مشکل معیارهای چندگانه ((2)) اگر و تنها اگر هر $\mathbf{x}' \in Q$ وجود داشته باشد به طوری که $\mathbf{Rx}' \succ_e \mathbf{Rx}$. توجه داشته باشید که هر راه حل کارآمد عادلانه، یک راه حل کارآمد است اما نه بالعکس. با توجه به نظریه اکثریت سازی (Marshall and Olkin [13]), رابطه تسلط ضعیف عادلانه $\succeq_e$ را می توان به روش های مختلف با نامعادله جبری بیان نمود. یعنی گزاره زیر معتبر است.

گزاره $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in R^m$ ، هر یک از سه وضعیت زیر معادل $\mathbf{y}' \succeq_e \mathbf{y}''$: است:

(1) برای هر $z \in R$

$$\sum_{i=1}^{m} (z - y_i')_+ \leqslant \sum_{i=1}^{m} (z - y_i'')_+, \tag{8}$$

که در آن اپراتور $(\cdot)_+$ نشاندهنده قسمت غیرمنفی عدد است؛

(2) برای تمام توابع مقعر افزایشی مداوم u

$$\sum_{i=1}^{m} u(y_i') \geqslant \sum_{i=1}^{m} u(y_i''); \tag{9}$$

(3) برای k = 1,2....,m

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i(\mathbf{y}') \geqslant \sum_{i=1}^{k} \theta_i(\mathbf{y}''), \tag{10}$$

که در آن $\theta_i(\mathbf{y})$ نشاندهنده ضرایب افزایشی مرتبه بندی شده بردار $\theta_2(\mathbf{y}) \leqslant \cdots \leqslant \theta_m(\mathbf{y})$ $\mathbf{y}$, i.e., $\theta_1(\mathbf{y}) \leqslant$ است و یک جایگشت τ از مجموعه I وجود دارد به طوری که $\theta_i(\mathbf{y}) = y_{\tau(i)}$ برای i = 1,2,....,m

شرط (8) رابطه غلبه تصادفی (درجه دوم) را تعریف می کند (cf. Whitmore and Findlay [22]). شرط (9) در تئوری مطلوبیت مورد انتظار به کار گرفته می شود (Fishburn [3], Levy [9]). بنابراین رابطه غلبه قابل تعادل کاملاً سازگار با تئوری مطلوبیت مورد انتظار و غلبه تصادفی است. این تضمین می کند که توسط جستجوی راه حل های کارآمد برابر مختلف مسئله (2)، ما قادر به شناسایی نمونه کارهای بهینه با توجه به اولویت های مخالف ریسک مختلف هستیم.

در این مقاله ما روی شرط (10) تمرکز می کنیم که مرتبط با تئوری دوگانه نامبرده انتخاب تحت ریسک است (Yaari [24]). با استفاده از نگاشت مرتبه بندی تجمعی $(\bar{\theta}_1(\mathbf{y}), \bar{\theta}_2(\mathbf{y}), \ldots, \bar{\theta}_m(\mathbf{y}))$، که در آن

$$\bar{\theta}_i(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{i} \theta_k(\mathbf{y}), \quad (11)$$

شرط (10) می تواند بر حسب نامعادله برداری به صورت زیر دوباره نوشته شود.

$$\mathbf{y}' \succeq_e \mathbf{y}'' \Leftrightarrow \bar{\Theta}(\mathbf{y}') \geqq \bar{\Theta}(\mathbf{y}''). \quad (12)$$

در نتیجه تسلط عادلانه معادل سلطه منطقی بردارهای دستاورد توسط نگاشت مرتبه بند تجمعی $\bar{\Theta}$ است. از این رو، شرایط (10) به ما اجازه می دهد تا به بیان مشکل انتخاب نمونه کارها (2) با تنظیمات عادلانه منطقی به عنوان یک برنامه استاندارد معیارهای چندگانه با توابع هدف اصلاح شده توسط نگاشت مرتبه بندی تجمعی $\bar{\Theta}(\mathbf{Rx})$. بپردازیم.

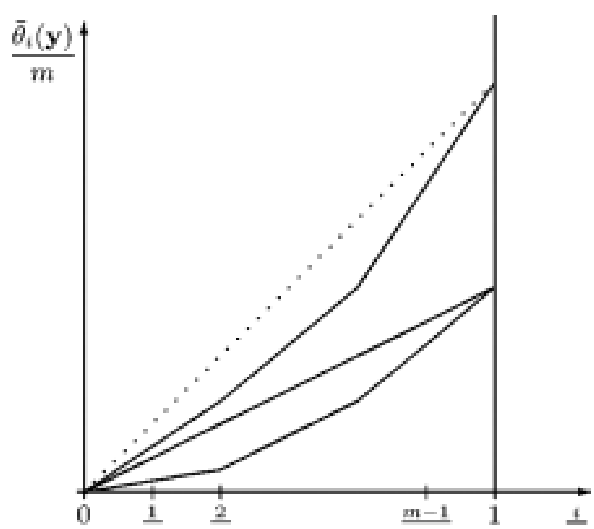
نتیجه فرعی 1. نمونه کار x، یک راه حل کارآمد معادل برای مسئله (1) است اگر و فقط اگر این یک راه حل کارآمد برای مسئله چندمعیاری باشد

$$\max\{(\bar{\theta}_1(\mathbf{Rx}), \bar{\theta}_2(\mathbf{Rx}), \ldots, \bar{\theta}_m(\mathbf{Rx})) : \mathbf{x} \in Q\}. \quad (13)$$

تابع هدف در مشکل معیارهای چندگانه را می توان با ثوابت مثبت بدون تاثیر مجموعه ای از راه حل های کارآمد تقسیم نمود. برای درک بهتر مشکل معیارهای چندگانه (13) برای انتخاب نمونه کارها، می توان توابع هدف نرمال

شده $\bar{\bar{\theta}}_i(\mathbf{y})/i$ for $i = 1, \bar{2}, \ldots, m.$ را در نظر گرفت. کمیت های $\bar{\theta}_i(\mathbf{y})/i$ معانی جزئی از ضرایب i اول را در بردار دستیابی مرتبه بندی شده $\Theta(\mathbf{y}),$ تعریف می کند، یعنی میانگین های کوچکترین نتایج i در y. توجه داشته باشید که $\bar{\theta}_1(\mathbf{y})/1$ نشان دهنده حداقل نتیجه ymin و آخرین هدف $\bar{\theta}_m(\mathbf{y})/m$ نشاندهنده نتیجه مورد انتظار (میانگین) $\mu(\mathbf{y}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$ است. بنابراین ماکزیمم نمودن بازگشت مورد انتظار و ماکزیمم نمودن بدترین نتیجه ممکن، اهداف تک در مدل معیارهای چندگانه هستند. مجموعه کامل از m معیار به ما اجازه می دهد تا تمام اولویت های مخالف ریسک سازگار با بدیهیات (3)-(7) مدلسازی نماییم.

در اقتصاد درآمد، منحنی لورنز (cf. Kendall and Stuart [5], Gastwirth[14]) یک ابزار عمومی برای توضیح نامعادله ها است. در زمینه توزیع درآمد، منحنی لورنز، یک جمعیت تجمعی به ازای منحنی درآمد است. دقیقاً تمام افراد توسط درآمد رتبه بندی می شوند، از فقیرترین تا غنی ترین. برای هر رتبه، ما تناسب درآمد پرداخت شده توسط افراد را در این رتبه و تمام رتبه ها زیر این رتبه را محاسبه می کنیم. رابطه بین تناسبات جمعیت و درآمد منحنی لورنز را تعریف می کند.



شکل 1. منحنی های لورنز مطلق و $\bar{\Theta}(\mathbf{y})$

یک توزیع معادل کامل از درآمد دارای خط قطری به صورت منحنی لورنز است. تمام توزیعات، منحنی های کاو لورنز را زیر خط قطری تولید می کند. اگر منحنی متناظر با توزیع A زیر منحنی متناظر با توزیع B قرار گیرد، آنگاه توزیع A به صورت نابرابرتر از مورد آخر در نظر گرفته می شود.

توجه کنید که تعریف مقادیر $\bar{\theta}_i(\mathbf{y})$ برای I = 1,2,.....m مشابه به ساخت منحنی لورنز برای جمعیتی را m نتیجه است. بردار $\bar{\Theta}(\mathbf{y})$ می تواند به صورت گرافیکی با نقطه اتصال منحنی نوع لورنز (0،0) و نقاط $(i/m, \theta_i(\mathbf{y})/m)$ برای i = 1,2,....m دیده شود. در مورد دو بردار اکتساب $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in Y$ با همان نتایج مثبت کلی $\bar{\theta}_m(\mathbf{y}') = \bar{\theta}_m(\mathbf{y}'')$ (همان میانگین مثبت)، نامعادله $\bar{\Theta}(\mathbf{y}') \geqslant \bar{\Theta}(\mathbf{y}'')$ برابر با سلطه y’ بر y’’ در منحنی های لورنز است. در مورد میانگین مثبت، منحنی های لورنز می تواند گراف های بردارهای $\frac{1}{\mu(\mathbf{y})}\bar{\Theta}(\mathbf{y})$ را در نظر گیرد. گراف ها بردارهای $\bar{\Theta}(\mathbf{y})$ به شکل منحنی های کاو غیرنرمال (شکل 1)، منحنی های لورنز مطلق در می آید. توجه کنید که بر حسب منحنی های لورنز، هیچ بردار اکتسابی نمی تواند بهتر از بردار نتایج معادل باشد. رابطه (12) همچنین مقادیر نتایج را در نظر می گیرد. بردارها با نتایج معادل مطابق با مقدار نتایج خود متمایز می شوند. انها به طور گرافیکی با خطوط سربالایی مختلف در شکل 1 نمایش داده می شوند. با اولویت رابطه (12)، یک بردار اکتساب با نتایج نابرابر بزرگ می تواند به بردار اکتساب با نتایج معادل کوچک ترجیح داده می شود. توابع هدف فردی برای مسئله (13)، تابع خطی تکه ای کاو برای بردار اکتساب y = Rx هستند. آنها می توانند به شکل زیر نوشته شوند

$$\bar{\theta}_i(\mathbf{y}) = \min_{\tau \in \Pi} \left(\sum_{k=1}^{i} y_{\tau(k)} \right),$$

که در آن Π بیانگر مجموعه ای از تمام جایگشت های τ برای مجموعه ای از شاخص های I است. بنابراین، مشکل انتخاب نمونه کارهای ما (13) را می توان به عنوان معیارهای چندگانه خطی زیر بیان نمود:

برنامه:

$$\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad (z_1, z_2, \ldots, z_m) && (14)\\
&\text{subject to} \quad \mathbf{x} \in Q, && (15)\\
&\qquad y_i = \mathbf{r}_i \mathbf{x} \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m, && (16)\\
&\qquad z_i \leqslant \sum_{k=1}^{i} y_{\tau(k)} \quad \text{for } \tau \in \Pi,\ i = 1, 2, \ldots, m. && (17)
\end{aligned}$$

برنامه معیارهای چندگانه خطی (17) - (14)برابر با مشکل (13) است همانطور که در گزاره های زیر (Kostreva و Ogryczak [8]). گفته شده است.

گزاره 2. یک سه گانه $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0)$ یک جواب مناسب برای (14)-(17) است اگر و فقط اگر $\mathbf{y}^0 = \mathbf{R}\mathbf{x}^0,\ \mathbf{z}^0 = \bar{\Theta}(\mathbf{y}^0)$ و $\mathbf{x}^0$ جوابی مناسب برای مسئله (13) باشد.

نتیجه فرعی. یک سه گانه $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0)$ یک جواب مناسب برای (14)-(17) است اگر و فقط اگر $\mathbf{y}^0 = \mathbf{R}\mathbf{x}^0,\ \mathbf{z}^0 = \bar{\Theta}(\mathbf{y}^0)$ و $\mathbf{x}^0$ یک جواب مناسب معادل برای برای مسئله انتخاب نمونه کار (2) باشد.

نتیجه فرعی 2 تضمین می کند که با جستجوی راه حل های مناسب مختلف برای برنامه خطی معیارهای چندگانه (14)-(17)، ما قادر به شناسایی راه حل هایی برای مسئله انتخاب نمونه کار (2) هستیم که با توجه به اولویت های مخالف ریسک مختلف بهینه است. بنابراین مسئله (14)-(17) یک مدل معیارهای چندگانه خطی برای مسئله انتخاب نمونه کار است.

3 . روش دومعیاری

راه حل های کارآمد مشکل معیارهای چندگانه (2)را می توان با تولید اسکالرسازی ساده از این مشکل تولید نمود. بسیاری از آنها بر اساس مجموع نتایج فردی است

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m}\mathbf{r}^i\mathbf{x}:\ \mathbf{x}\in Q\right\}, \quad (18)$$

یا در رویکرد ماکزیمم

$$\max\left\{\min_{i=1,\ldots,m}\ \mathbf{r}^i\mathbf{x}:\ \mathbf{x}\in Q\right\}. \quad (19)$$

اسکالرسازی (18) همیشه راه حل های کارآمد را زمانی که رابطه اولویت مربوطه یک ارتباط منطقی اولویت است تولید می کند (خواص انعطاف پذیری ، متعدی و یکنواختی سخت را حفظ می کند).اسکالرسازی maximin (19) راه حل های کارآمد را به جز در مورد راه حل های جایگزین مطلوب تولید می کند. این بدان معناست که، راه حل بهینه (19) می تواند (عقلانی) تنها با یکی دیگر از راه حل های بهینه تحت سلطه قرار گیرد. بنابراین مجموعه بهینه (19) شامل یک راه حل کارآمد و راه حل منحصر به فرد (در فضای معیار) مطلوب، کارآمد می باشد. اسکالرسازی (18) معادل حداکثر نمودن نتیجه مورد انتظار است در حالی که اسکالرسازی (19) مربوط به حداکثرسازی بدترین نتیجه است. هر دو روابط اولویت مربوطه بیطرف هستند اما آنها اصل نقل و انتقالات را برآورده نمی سازند. بنابراین، اسکالرسازی (18) و (19)، در حالت کلی، ممکن است راه حل هایی را تولید نکند که به طور عادلانه کارآمد باشند.

نتیجه فرعی 1 اجازه می دهد تا راه حل های عادلانه و کارآمد (2) به عنوان راه حل کارآمد مشکل تولید شود (13). توجه داشته باشید که اسکالرسازی (18) برای به حداکثر رساندن نتیجه مورد انتظار، مطابق با به حداکثر رساندن آخرین هدف (m امین) در این مسئله است (13). به طور مشابه، اسکالرسازی maximin (19) مربوط به حداکثرسازی هدف اول در (13) است. بنابراین، در مورد m=2، مجموعه ای از راه حل های عادلانه و کارآمد برابر است با مجموعه ای از راه حل های کارآمد از مشکل دومعیاری با اهداف تعریف شده به عنوان حداقل و مجموع دو هدف اصلی. بدیهی است این در مشکل انتخاب نمونه کارها که در آن M بزرگتر است درست نیست. در حالت کلی از m دلخواه بزرگ، استنباط زیر معتبر است.

نتیجه فرعی 3. به جز برای نمونه کارها با میانگین یکسان و بدترین نتیجه، هر راه حل کارآمد برای مشکل دومعیاری

$$\max\left\{\left(\min_{i=1,\dots,m} \mathbf{r}^i\mathbf{x}, \sum_{i=1}^{m} \mathbf{r}^i\mathbf{x}\right):\ \mathbf{x}\in Q\right\} \tag{20}$$

یک جواب کارامد معادل برای مسئله انتخاب نمونه کار (2) است.

مسئله دومعیاری (20) می تواند یک رویکرد ریسک-میانگین در نظر گرفته شده با اندازه ریسک $\varrho(\mathbf{y})$ تعریف شده به صورت انحراف ماکزیمم (سمت پایین) باشد [Young [28]]

$$\Delta(\mathbf{y}) = \max_{i=1,\dots,m}\big(\mu(\mathbf{y}) - y_i\big) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i - \min_{i=1,\dots,m} y_i = \frac{1}{m}\bar{\theta}_m(\mathbf{y}) - \bar{\theta}_1(\mathbf{y}). \tag{21}$$

یک مزیت مهم برای رویکردهای ریسک متوسط، امکان تحلیل سبک سنگین کردن تصویری است. با فرض ضریب سبک سنگین کردن λ بین ریسک و میانگین، می توان به طور مستقیم مقادیر واقعی $\mu(\mathbf{y}) - \lambda\varrho(\mathbf{y}).$ را مقایسه نمود. گزاره زیر، توجیه کننده چنین تحلیلی برای ریسک تعریف شده به صورت انحراف ماکزیمم (21) است.

گزاره 3. به جز برای نمونه کارها با انحراف ماکزیمم و میانگین یکسان، هر نمونه کار $\mathbf{x}\in Q$ است که توسط $\mu(\mathbf{Rx}) - \lambda\Delta(\mathbf{Rx})$ با $0 < \lambda < 1$ یک راه حل کارآمد معادل برای مسئله انتخاب نمونه کار (2) است.

اثبات. در نظر بگیرید که $0 < \lambda < 1$ and $\mathbf{x}^0 \in Q$ توسط $\mu(\mathbf{Rx}) - \lambda\Delta(\mathbf{Rx}).$ ماکزیمم شود. توجه کنید که

$$\mu(\mathbf{Rx}) - \lambda\Delta(\mathbf{Rx}) = \lambda\bar{\theta}_1(\mathbf{Rx}) + \frac{1-\lambda}{m}\bar{\theta}_m(\mathbf{Rx}). \tag{22}$$

از اینرو، $\mathbf{x}^0$ یک جواب بهینه برای مسئله دومعیاری (20) و ناشی از نتیجه فرعی 3، $\mathbf{x}^0$ یک راه حل مناسب معادل برای مسئله انتخاب نمونه کار (2) است.

حداکثر انحراف، اندازه گیری بسیار بدبینانه مربوط به بدترین ریسک مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. این مورد در برخی از شیوه ها بسیار" خشن "است زمانی که توزیع نتایج غیر از از بدترین مورد را در نظر نمی گیرد که باعث می شود که تنها دو توابع هدف $\bar{\theta}_i(\mathbf{y})$ از (13) استفاده شوند. اقدامات ریسک با در نظر گرفتن همه مقادیر وجود دارد.

Konno and Yamazaki [7] مدل ریسک متوسط را با استفاده از انحراف مطلق معرفی نموده است

$$\delta(\mathbf{y}) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left|\mu(\mathbf{y}) - y_i\right| = \frac{1}{m}\sum_{i:y_i<\mu(\mathbf{y})}\left[\mu(\mathbf{y}) - y_i\right] \tag{23}$$

به عنوان اندازه ریسک است. انحراف مطلق می تواند بر حسب $\bar{\theta}_i(\mathbf{y})$ به صورت زیر بیان شود:

$$\delta(\mathbf{y}) = \frac{1}{m}\sum_{i:\theta_i(\mathbf{y})<\mu(\mathbf{y})}\left[\mu(\mathbf{y}) - \theta_i(\mathbf{y})\right] = \frac{1}{m}\max_{i=1,\ldots,m-1}\left[\frac{i}{m}\bar{\theta}_m(\mathbf{y}) - \bar{\theta}_i(\mathbf{y})\right]. \tag{24}$$

این منجر به اثبات زیر می شود.

گزاره 4. به جز برای نمونه کارها با میانگین یکسان و انحراف مطلق، هر نمونه کار $\mathbf{x} \in Q$ ماکزیمال توسط $\mu(\mathbf{Rx}) - \lambda\delta(\mathbf{Rx})$ با $0 < \lambda < m/(m-1)$ یک جواب مناسب معادل برای مسئله انتخاب نمونه کار (2) است.

اثبات. در نظر بگیرید که $0 < \lambda < m/(m-1)$ و $\mathbf{x}^0 \in Q$ توسط $\mu(\mathbf{Rx}) - \lambda\delta(\mathbf{Rx})$. ماکزیمال است. توجه کنید که به علت (24)

$$\begin{aligned}\mu(\mathbf{Rx}) - \lambda\delta(\mathbf{Rx}) &= \frac{1}{m}\bar{\theta}_m(\mathbf{Rx}) + \frac{\lambda}{m}\min_{i=1,\ldots,m-1}\left[\bar{\theta}_i(\mathbf{Rx}) - \frac{i}{m}\bar{\theta}_m(\mathbf{Rx})\right]\\ &= \min_{i=1,\ldots,m-1}\left[\frac{\lambda}{m}\bar{\theta}_i(\mathbf{Rx}) + \frac{m-i\lambda}{m^2}\bar{\theta}_m(\mathbf{Rx})\right].\end{aligned}$$

بنابراین، $\mathbf{x}^0$ یک راه حل بهینه برای اسکالرسازی ماکزیمم برای مسئله چندمعیاری است:

$$\max\left\{\left(g_1(\mathbf{Rx}), g_2(\mathbf{Rx}), \ldots, g_{m-1}(\mathbf{Rx})\right):\ \mathbf{x}\in Q\right\}$$ (25)

با m-1 تابع هدف gi به واسطه فرمول زیر

$$g_i(\mathbf{y}) = \frac{\lambda}{m}\bar{\theta}_i(\mathbf{y}) + \frac{m-i\lambda}{m^2}\bar{\theta}_m(\mathbf{y}) \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m-1$$ (26)

علاوه براین، هر دو ضریب در (26) مثبت هستند و بنابراین هر راه حل مناسب (25) نیز یک راه حل بهینه برای مسئله (13) است.

فرض کنید که یک نمونه کار $\mathbf{x}' \in Q$ وجود دارد که به طور معادل بر $\mathbf{x}^0$. غلبه می کند. بنابراین، $\bar{\Theta}(\mathbf{Rx}') \geqslant \bar{\Theta}(\mathbf{Rx}^0)$ و به علت ضرایب مثبت در (26)، $g_i(\mathbf{Rx}') \geqslant g_i(\mathbf{Rx}^0)$ برای i = 1,2,……m-1. از طرف دیگر، $\min_{i=1,\ldots,m-1} g_i(\mathbf{Rx}') \leqslant \min_{i=1,\ldots,m-1} g_i(\mathbf{Rx}^0)$. از اینرو شاخص i0 وجود دارد به گونه ای که $g_{i_0}(\mathbf{Rx}') = g_{i_0}(\mathbf{Rx}^0)$ و بنابراین $\bar{\theta}_m(\mathbf{Rx}^0)$. بنابراین $\mu(\mathbf{Rx}') = \mu(\mathbf{Rx}^0)$ and $\delta(\mathbf{Rx}') = \delta(\mathbf{Rx}^0)$, اثبات را کامل می کند.

[Yitzhaki [27 مدل میانگین ریسک را با استفاده از تفاوت میانگین GIni (مطلق)

$$G(\mathbf{y}) = \frac{1}{2m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|y_i - y_j|$$ (27)

به عنوان اندازه گیری ریسک معرفی نمود. تفاوت میانگین GIni (مطلق) می تواند برحسب $\bar{\theta}_i(\mathbf{y})$ به صورت زیر بیان شود:

$$G(\mathbf{y}) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m-1}\left[i\bar{\theta}_{i+1}(\mathbf{y}) - (i+1)\bar{\theta}_i(\mathbf{y})\right] = \frac{m-1}{m^2}\bar{\theta}_m(\mathbf{y}) - \frac{2}{m^2}\sum_{i=1}^{m-1}\bar{\theta}_i(\mathbf{y}).$$ (28)

که منجر به اثبات زیر می شود.

گزاره 5. هر نمونه کار $\mathbf{x} \in Q$ که توسط $\mu(\mathbf{Rx}) - \lambda G(\mathbf{Rx})$ ماکزیمال است با $\lambda < m/(m-1)$ یک راه حل مناسب معادل برای مسئله انتخاب نمونه کار (2) است.

اثبات. $0 < \lambda < m/(m-1)$ and $\mathbf{x}^0 \in Q$ را توسط $\mu(\mathbf{Rx}) - \lambda G(\mathbf{Rx})$ در نظر بگیرید. توجه کنید که به علت (28)

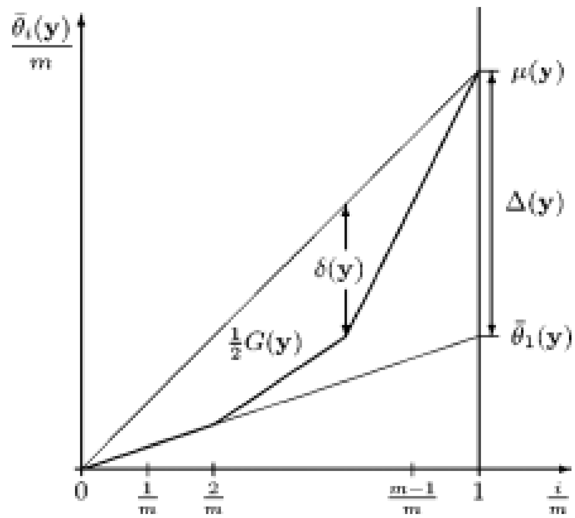
$$\mu(\mathbf{Rx}) - \lambda G(\mathbf{Rx}) = \frac{2\lambda}{m^2} \sum_{i=1}^{m-1} \bar{\theta}_i(\mathbf{Rx}) + \frac{m - \lambda(m-1)}{m^2} \bar{\theta}_m(\mathbf{Rx}). \quad (29)$$

از اینرو، در مورد $0 < \lambda < m/(m-1)$، تابع $\mu(\mathbf{Rx}) - \lambda G(\mathbf{Rx})$ یک ترکیب خطی با وزن های مثبت توابع هدف $\bar{\theta}_i(\mathbf{Rx})$ برای i =1,2,....m است. بنابراین، $\mathbf{x}^0$ یک راه حل مناسب برای مسئله چندمعیاری (13) و ناشی از نتیجه فرعی 1، $\mathbf{x}^0$ یک راه حل مناسب معادل برای مسئله انتخاب نمونه کار (2) است.

سه مقیاس ریسک، ما در نظر گرفتیم که منجر به مسائل برنامه نویسی خطی پارامتری می شود:

$$\max\{\mu(\mathbf{Rx}) - \lambda \varrho(\mathbf{Rx}):\ \mathbf{x} \in Q\}, \quad (30)$$

در حالی که به دنبال سازش ریسک متوسط است .ما نشان دادیم که در مورد $0 < \lambda <$ آنها می توانند اسکالرسازی مشکل معیارهای چندگانه (13) در نظر گرفته شوند. می توان در نمودار از نوع لورنز نشان داده شود، نموداری که ما در بخش قبلی (شکل 1) در نظر گرفتیم. به یاد بیاورید که بردار $\Theta(\mathbf{y})$ می توان به صورت گرافیکی با نقطه اتصال مطلق منحنی لورنز (0،0) و نقاط $(i/m, \bar{\theta}_i(\mathbf{y})/m)$ برای i = 1,2,....m دید که در آن آخرین نقطه $(1, \mu(\mathbf{y}))$. (برای i = m) است. توجه دااشته باشید که در مدل ما، بردار موفقیت بدون ریسک با مقدار متوسط $\mu(\mathbf{y})$ دارای تمام ضرایب برابر $\mu(\mathbf{y})$ است و منحنی مطلق لورنز آن، خط صعودی اتصال دهنده نقاط (0، 0) و $(1, \mu(\mathbf{y}))$. است. از اینرو فضای بین منحنی مطلق لورنز $(i/m, \theta_i(\mathbf{y})/m)$ و خط صعودی آن نشان دهنده پراکندگی (و در نتیجه ریسک) y در مقایسه با نتیجه قطعی $\mu(\mathbf{y})$ است.



شکل 2. مقیاس های ریسک و $\bar{\Theta}(\mathbf{y})$

ما باید آن را فضای پراکندگی بنامیم .هم اندازه و هم شکل فضای پراکندگی برای شرح کامل ریسک مهم هستند .با این حال، کاملا طبیعی است که برخی از پارامترهای اندازهرا به عنوان ویژگی خلاصه ای از ریسک در نظر بگیرید . همانطور که در شکل 2 نشان داده شده است، سه اندازه ریسک که ما در نظر گرفته ایم، نشان دهنده برخی از پارامترهای اندازه فضای پراکندگی است .توجه داشته باشید که قطر عمودی فضای پراکندگی در نقطه i/m داده شده به صورت $\delta_i(\mathbf{y}) = \frac{i}{m^2}\bar{\theta}_m(\mathbf{y}) - \frac{1}{m}\bar{\theta}_i(\mathbf{y}).$ داده می شود. از اینرو، برای انحراف مطلق، ناشی از (24)، ما در نظر می گیریم که $\delta(\mathbf{y}) = \max_{i=1,\dots,m} \delta_i(\mathbf{y})$. این بدان معناست که $\delta(\mathbf{y})$ نشاندهنده بزرگریتن شعاع عموی برای فضای پراکندگی است. به طور مشابه، برای انحراف ماکزیمم، ناشی از (21)، ما در نظر می گیریم که $\Delta(\mathbf{y}) = m\delta_1(\mathbf{y})$. بنابراین $\Delta(\mathbf{y})$ نشاندهنده تصویرسازی $\delta_1(\mathbf{y})$ در خط عمودی در i=m یا بزرگترین شعاع عمودی برای پوش مثلثی متناظر برای فضای پراکندگی است. تفاوت میانگین Gini، ناشی از (28)، $G(\mathbf{y}) = \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m-1} \delta_i(\mathbf{y}).$ را برآورده می سازد. این بدین معنی است که G(y) دو برابر مساحت فضای پراکندگی است. این توضیح می دهد که چرا برای این رویکرد میانگین-ریسک، ما قوی ترین نتیجه را داریم به طوری که هر راه حل بهینه برای مسئله متناظر (30) با $0 < \lambda \leqslant 1$ به طور معادل مناسب

است (گزاره 5). نتیجه قوی مشابه می تواند با استفاده از ترکیبی از تفاوت میانگین gini با دیگر تدابیر ریسک به دست آید و در نتیجه مدل اولویت متناظر را غنی سازد. به خصوص، اثبات زیر از گزاره های 3 و 5 می آید.

نتیجه فرعی 4. هر نمونه کار $\mathbf{x} \in Q$ که توسط $\mu(\mathbf{Rx}) - \lambda_1 G(\mathbf{Rx}) - \lambda_2 \Delta(\mathbf{Rx})$ ماکزیمال است با $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 \geqslant 0 \text{ and } \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1$ یک جواب مناسب عادلانه برای مسئله انتخاب نمونه کار (2) است.

4. تجمع وزندهی شده مرتبه بندی شده

در مورد بازده، می توان اسکالرسازی (18) را با توابع هدف وزندهی شده برای تولید راه حل های مختلف مناسب را استفاده نمود. در حقیقت، یک پارامترسازی کامل را برای مجموعه مناسب برای برنامه های خطی چندمعیاری را فراهم می کند. در مورد برنامه نویسی چندمعیاری عادلانه، نمی توان وزن های مختلف را برای توابع هدف فردی منسوب نمود، زمانی که الزامات بی طرفی (6) نقض می کند. هرچند ناشی از نتیجه فرعی 1، رویکرد وزندهی را می تواند برای مسئله (13) حاصل در اسکالرسازی اعمال نمود.

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m} w_i \bar{\theta}_i(\mathbf{Rx}):\ \mathbf{x} \in Q\right\}. \tag{31}$$

توجه کنید که ناشی از تعریف نگاشت $\bar{\Theta}$ با (11)، مسئله بالا می تواند در شکل وزن های $\bar{w}_i = \sum_{j=i}^{m} w_j \ (i = 1, 2, \ldots, m)$ تخصیص داده شده به ضرایب بردار دستیابی مرتبه بندی $\Theta(\bar{\mathbf{R}}\mathbf{x})$ بیان شود. چنین رویکردی برای بهینه سازی معیارهای چندگانه توسط Yager [25] به عنوان متوسط گیری وزندهی شده مرتبه بندی نامیده شده (OWA) معرفی شد. از زمان معرفی آن، تجمع OWA برای بسیاری از حوزه ها مانند کنترلرهای منطقی فازی (Yager and Filev [26]) و در تصمیم گیری تحت عدم قطعیت (Segal [17]). اعمال شده است.

زمانی اعمال تجمع برای مسئله انتخاب نمونه کار (2) ما داریم:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m} w_i\theta_i(\mathbf{Rx}):\ \mathbf{x}\in Q\right\}. \quad (32)$$

گزاره 6. یک نمونه کار $\mathbf{x}^0 \in Q$ یک راه حل کارامد عادلانه برای مسئله انتخاب نمونه کار (2)، اگر و تنها اگر، وزن های مثبت و کاهشی محدود wi وجود داشته باشد، یعنی،

$$w_1 > w_2 > \cdots > w_{m-1} > w_m > 0, \qquad (33)$$

به طوری که $\mathbf{x}^0$ یک راه حل بهینه برای مسئله OWA متناظر (32) است.

اثبات. مسئله (32) با وزن ها wi می تواند به شکل زیر بیان شود

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m} w_i'\bar{\theta}_i(\mathbf{Rx}):\ \mathbf{x}\in Q\right\},$$

که در آن ضرایب w'i به صورت $w_m' = w_m$ و $w_i' = w_i - w_{i+1}$ برای I = 1,2.,....m-1 تعریف می شوند. اگر (33) برقرار باشد، آنگاه $w_i' > 0$ برای I = 1,2.,....m-1. بنابراین، به علت نتیجه فرعی 1، هر راه حل بهینه از (32)، یک راه حل ضریب عادلانه برای (2) است.

علاوه بر این، ما باید نشان دهیم که برای هر جواب مناسب عادلانه $\mathbf{x}^0 \in Q$، وزن های کاهشی و افزایشی wi وجود دارد (یعنی وزن های برآورده کننده (33)) به طوری که $\mathbf{x}^0$ یک راه حل بهینه برای مسئله OWA متناظر (32) است. به علت گزاره 2، اگر $\mathbf{x}^0$ یک راه حل مناسب عادلانه (2) باشد، آنگاه $(\mathbf{x}^0, \mathbf{Rx}^0, \bar{\Theta}(\mathbf{Rx}^0))$ یک راه حل بهینه مناسب برای برنامه خطی چندمعیاری (14)-(17) است. بنابراین، از نظریه بهینه سازی خطی چندمعیاری ([Steuer [20)،، وزن های مثبت $\bar{w}_i$ (i = 1,2,....m) وجود دارد به طوری که $(\mathbf{x}^0, \mathbf{Rx}^0, \bar{\Theta}(\mathbf{Rx}^0))$ یک راه حل بهینه برای مسئله

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m}\bar{w}_i z_i:\ (15)\text{–}(17)\right\}.$$

ناشی از وزن های مثبت $\bar{w}_i$، مسئله بالا برابرست با

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m}\bar{w}_i\bar{\theta}_i(\mathbf{Rx}):\ \mathbf{x}\in Q\right\}$$

که به واسطه تعریف نگاشت $\bar{\Theta}$ با (11) می تواند به صورت مسئله OWA (32) با وزن های $w_i = \sum_{j=i}^{m}\bar{w}_j\ (i = 1, 2, \ldots, m)$ بیان شود. علاوه بر این، وزن های wi الزام (33) براورده می سازد.

بنابراین، وزن های کاهشی و افزایشی wi وجود دارد به طوری که $\mathbf{x}^0$ یک راه حل بهینه مسئله OWA متناظر است (32).

از گزاره 6، داریم که با جستجوی راه حل های بهینه OWA، برای وزن های مثبت و کاهشی مختلف، ما قادر به شناسایی جواب های مناسب عادلانه مختلف مسئله (2) از اینرو برای یافتن نمونه کارهای بهینه با توجه اولویت های مخالف ریسک هستیم. علاوه بر این، هر مقدار بهینه نمونه کار با توجه به برخی اولویت های مخالف ریسک می تواند به صورت راه حل بهینه مسئله OWA (32) با برخی وزن های رضایت بخش (33) یافت شود. توجه کنید که رویکرد ریسک میانگین با ماکزیمم انحراف $\Delta(\mathbf{y})$ (21) به عنوان اندازه گیری ریسک، ناشی از (22)، می تواند به صورت تجمع OWA (32) با وزن ها: $w_1 = (1 + (m-1)\lambda)/m$ و $w_i = (1-\lambda)/m$ برای i = 2,....m. از اینرو، برای ضریب سبک سنگین کردن $0 < \lambda < 1$ تمام وزن ها مثبت هستند اما $w_2 = w_3 = \cdots = w_m$ که سبب می شود که تمام جواب ها به طور قابل توجهی مناسب نباشند. به طور مشابه، رویکرد ریسک میانگین با تفاوت میانگین G(y) Gini (27) به عنوان اندازه گیری ریسک، ناشی از (29)، می تواند به عنوان تجمع OWA (32) با وزن های

$w_i = (m + (m - 2i + 1)\lambda)/m^2$ برای i = 1,2,....m دیده شود. از اینرو، برای $0 < \lambda < m/(m-1)$ ضریب سبک سنگین کردن، وزن ها مثبت هستند و شدیداً کاهشی (33) هستند که سبب می شوند که هر جواب بهینه به طور منصفانه مناسب باشد. هرچند $w_i - w_{i+1} = 2\lambda/m^2$، برای تمام i = 1,2,.....,m-1. بنابراین، این رویکرد ریسک میانگین، بر حسب تجمع OWA، تنها وزن های کاهشی را توسط یک مرحله ثابت در نظر می گیرد. بنابراین، تمام جواب های بهینه عادلانه نمی تواند در این روش یافت شود. در بخش بعدی، ما به تجزیه و تحلیل رویه راه حل برای مسائل OWA با وزن های دلخواه برآوردکننده (33) می پردازیم.

به عنوان مورد محدود کننده مسئله OWA (32)، زمانی که تفاوت ها در میان وزن ها wi تمایل به بی نهایت بودن پیدا کند، ما به مسئله واژه نگاری می رسیم

$$\text{lexmax}\left\{\left(\theta_1(\mathbf{Rx}), \theta_2(\mathbf{Rx}), \ldots, \theta_m(\mathbf{Rx})\right): \ \mathbf{x} \in Q\right\}, \qquad (34)$$

که در آن ابتدا $\theta_1(\mathbf{Rx})$ ماکزیمم می شود، بعد $\theta_2(\mathbf{Rx})$ و تا الی آخر. مسئله (34) نمایش دهنده رویکرد ماکزیمین واژه نگارانه برای مسئله معیارهای چندگانه اصلی (2) است. این یک پالایش از اسکالرسازی (قاعده مندی) ماکزیمم استاندارد (19) است، اما در مورد اول، علاوه بر کوچکترین نتیجه، ما همچنین کوچکترین نتیجه دوم را ماکزیمم می کنیم (به شرطی که کوچکترین نتیجه به اندازه ممکن بزرگ بماند)، کوچکترین مورد سوم را ماکزیمم می کنیم (به شرطی که کوچکترین نتیجه دوم به اندازه ممکن بزرگ بماند) و تا الی آخر. جواب ماکزیمم در نظریه بازی به عنوان هسته بازی ماتریس شناخته شده است (Potters and Tijs [16]). در مورد توابع هدف خطی و مجموعه عملی مقعر، یک تابع هدف غالب وجود دارد که در مجموعه بهینه کلی مسئله ماکزیمین ثابت است. بنابراین، مشابه با هسته بازی ماتریس، راه حل ماکزیمین مسئله (2) را می توان توسط بهینه سازی ترتیبی با حذف توابع غالب یافت. این رویکرد اخیراً برای مسائل برنامه نویسی خطی مرتبط با تخصیص منبع چنددوره ای (Klein et al. [6]) و برای مسائل چندمعیاری خطی (Marchi and Oviedo [11]) استفاده می شود.

به علت (11)، مسئله (34) معادل مسئله زیر است

$$\operatorname{lexmax}\left\{\left(\bar{\theta}_1(\mathbf{Rx}), \bar{\theta}_2(\mathbf{Rx}), \ldots, \bar{\theta}_m(\mathbf{Rx})\right):\ \mathbf{x} \in Q\right\}$$

که می تواند به عنوان بهینه سازی واژگانی استاندارد اعمال شده برای مسئله (13) در نظر گرفته شود. زمانی که بهینه سازی واژگانی، جواب های مناسب را تولید می کند، به علت نتیجه فرعی 1، ما به اثبات زیر می رسیم.

نتیجه فرعی 5. راه حل بهینه برای مسئله ماکزیمین واژگانی (34) یک جواب مناسب عادلانه برای مسئله انتخاب نمونه کار (2) است.

جواب ماکزیمین واژگانی با توجه به بردارهای اکتساب $\Theta(\mathbf{Rx})$ مرتبه بندی شده منحصر به فرد است. می توان آن را در برخی معانی به عنوان عادلانه ترین راه حل یا نمونه کار مخالف ریسک در نظر گرفت. توجه کنید که می تواند مسئله چندمعیاری (13) را به عنوان یک مسئله منصف در نظر گرفت (با یک رابطه اولویت منطقی منصف). در چنین وضعیتی، ما باید نتیجه فرعی 1 را برای مسئله (13) اعمال نماییم. این منتج به این مسئله با معیارهای مرتبه بندی شده تجمعی دوبل می شود که دوباره می تواند به عنوان منصف در نظر گرفته شود. به عنوان حد چنین رویکردی، ما به مسئله واژگانی ماکزیمین (34) می رسیم. می توان جواب کمتر منصف را با اعمال ماکزیمم سازی واژگانی معکوس برای مسئله (13)جستجو نمود، یعنی حل مسئله واژگانی

$$\operatorname{lexmax}\left\{\left(\bar{\theta}_m(\mathbf{Rx}), \bar{\theta}_{m-1}(\mathbf{Rx}), \ldots, \bar{\theta}_1(\mathbf{Rx})\right):\ \mathbf{x} \in Q\right\}, \quad (35)$$

که در آن $\bar{\theta}_m(\mathbf{Rx})$ اول ماکزیمم می شود، سپس $\bar{\theta}_{m-1}(\mathbf{Rx})$ و تا الی آخر. در حالیکه ماکزیمین واژگانی (34)، یک پالایش برای رویکرد ماکزیمین استاندارد (19) است، مسئله (35) یک پالایش واژگانی اسکالرسازی (18) است. توجه کنید که در مسئله بهینه سازی واژگانی، تقسیم اهداف بر ثابت ها روی جواب تاثیر نمی گذارد و $\bar{\theta}_i(\mathbf{y})/i$ نشاندهنده میانگین i بزرگترین ضرایب در بردار اکتساب y است. بنابراین مسئله (35) یک پالایش از

ماکزیمم سازی بازگشت مورد انتظار است و ما به آن به عنوان مسئله میانگین واژگانی یاد می کنیم. زمانی که بهینه سازی واژگانی، جواب های مناسب را تولید می کند، از نتیجه فرعی 1، ما اثبات زیر را داریم.

نتیجه فرعی 6. جواب بهینه برای مسئله میانگین واژگانی (35) یک جواب بهینه عادلانه برای مسئله انتخاب نمونه کار (2) است.

با استفاده از ویژگی های پایه برای بهینه سازی واژگانی و تساوی، مسئله میانگین واژگانی $\theta_i(\mathbf{y}) = \theta_{m-i+1}(-\mathbf{y}),$ را می تواند به صورت مسئله واژگانی دوباره نوشت

$$\operatorname{lexmax}\left\{\left(\bar{\theta}_m(\mathbf{Rx}), \theta_1(-\mathbf{Rx}), \theta_2(-\mathbf{Rx}), \ldots, \theta_{m-1}(-\mathbf{Rx})\right):\ \mathbf{x} \in Q\right\}.$$

ازاینرو، مسئله میانگین واژگانی (35) را می تواند به صورت رویکرد ماکزیمین واژگانی برای مسئله ای با نتایج منفی شده و مجموعه عملی تعریف شده توسط تمام نمونه کارها با بازگشت مورد انتظار ماکزیمال پیاده سازی نمود. بنابراین، مشابه با مسئله (34)، جواب میانگین واژگانی مسئله (2) می تواند به آسانی توسط بهینه سازی ترتیبی یافت شود.

5. تکنیک راه حل

اپراتور مرتبه بندی Θ استفاده شده در تجمع OWA غیر خطی است و به طور کل پیاده سازی آن سخت است. توجه کنید که هرچند که برای وزن های wi براورده سازنده (33)، برای هر جایگشت τ از I نامعادله زیر برقرار است:

$$\sum_{i=1}^{m} w_{\tau(i)} y_i \geqslant \sum_{i=1}^{m} w_i \theta_i(\mathbf{y}). \quad (36)$$

بنابراین، تجمع OWA یک تابع خطی تکه ای مقعر است

$$\sum_{i=1}^{m} w_i\theta_i(\mathbf{y}) = \min_{\tau\in\Pi}\left(\sum_{i=1}^{m} w_{\tau(i)}y_i\right), \quad (37)$$

که در آن Π نشاندهنده مجموعه تمام جایگشت های τ از I است. این ما را به شرایط بهینگی لازم و کافی برای تجمعات OWA هدایت می کند.

گزاره 7. اگر نمونه کار $\mathbf{x}^0 \in Q$، یک جواب بهینه برای مسئله خطی باشد

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m} w_i\mathbf{r}^{\bar{\tau}(i)}\mathbf{x}:\ \mathbf{x}\in Q\right\}, \quad (38)$$

که در آن وزن های wi (33) را برآورده می سازد و $\bar{\tau}$ چنین جایگشتی است که

$$\mathbf{r}^{\bar{\tau}(1)}\mathbf{x}^0 \leqslant \mathbf{r}^{\bar{\tau}(2)}\mathbf{x}^0 \leqslant \cdots \leqslant \mathbf{r}^{\bar{\tau}(m)}\mathbf{x}^0, \quad (39)$$

بنابراین $\mathbf{x}^0$ یک جواب بهینه برای مسئله OWA متناظر (32) است.

اثبات. اگر برای $\mathbf{x}^0 \in Q$ که (39) را برآورده می سازد، وزن های کاهشی و افزایشی wi وجود داشته باشد به طوری که $\mathbf{x}^0$ یک راه حل بهینه برای مسئله خطی (38) باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{m} w_i\theta_i\left(\mathbf{R}\mathbf{x}^0\right) = \sum_{i=1}^{m} w_i\mathbf{r}^{\bar{\tau}(i)}\mathbf{x}^0 \geqslant \sum_{i=1}^{m} w_i\mathbf{r}^{\bar{\tau}(i)}\mathbf{x} \geqslant \sum_{i=1}^{m} w_i\theta_i(\mathbf{R}\mathbf{x})$$

برای هر $\mathbf{x}\in Q$. بنابراین $\mathbf{x}^0$ یک راه حل بهینه برای مسئله OWA متناظر (32) است.

گزاره 8. یک نمونه کار $\mathbf{x}^0 \in Q$ به گونه ای برای برخی جایگشت های $\bar{\tau}$

$$\mathbf{r}^{\bar{\tau}(1)}\mathbf{x}^0 < \mathbf{r}^{\bar{\tau}(2)}\mathbf{x}^0 < \cdots < \mathbf{r}^{\bar{\tau}(m)}\mathbf{x}^0 \quad (40)$$

یک جواب بهینه برای مسئله OWA (32) با وزن های کاهشی و افزایشی wi است (یعنی وزن های برآورده کننده (33))، اگر و تنها اگر، $\mathbf{x}^0$ یک راه حل بهینه برای مسئله خطی متناظر (38) باشد.

اثبات. مناسب بودن وضعیت از گزاره 7 می آید. بنابراین ما تنها نیاز به اثبات لزوم آن داریم. در نظر بگیرید که $\mathbf{x}^0 \in Q$ یک راه حل بهینه برای مسئله OWA (32) با برخی وزن های کاهشی و افزایشی wi باشد (یعنی وزن های برآورده کننده (33)). نشان می دهیم که $\mathbf{x}^0$ را برآورده می سازد نیز یک جواب بهینه برای مسئله متناظر (38) با همان وزن ها است. اگر اینگونه نباشد، $\mathbf{x}^1 \in Q$ وجود داشته باشد به طوری که $\sum_{i=1}^{m} w_i \mathbf{r}^{\tau(i)} \mathbf{x}^1 > \sum_{i=1}^{m} w_i \mathbf{r}^{\tau(i)} \mathbf{x}^0$. توجه کنید که به علت محدب بودن مجموعه عملی Q، برای هر بردار $0 < \varepsilon < 1$، $\mathbf{x}^\varepsilon = (1-\varepsilon)\mathbf{x}^0 + \varepsilon \mathbf{x}^1$ یک جواب عملی و $\sum_{i=1}^{m} w_i \mathbf{r}^{\tau(i)} \mathbf{x}^\varepsilon > \sum_{i=1}^{m} w_i \mathbf{r}^{\tau(i)} \mathbf{x}^0$، علاوه بر این، $\varepsilon_0 > 0$ به طوری که برای تمام $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\mathbf{r}^{\tau(1)} \mathbf{x}^\varepsilon < \mathbf{r}^{\tau(2)} \mathbf{x}^\varepsilon < \cdots < \mathbf{r}^{\tau(m)} \mathbf{x}^\varepsilon.$$

ازاینرو، برای ε مثبت کوچک به طور مناسب

$$\sum_{i=1}^{m} w_i \theta_i (\mathbf{R}\mathbf{x}^\varepsilon) = \sum_{i=1}^{m} w_i \mathbf{r}^{\tau(i)} \mathbf{x}^\varepsilon > \sum_{i=1}^{m} w_i \mathbf{r}^{\tau(i)} \mathbf{x}^0 = \sum_{i=1}^{m} w_i \theta_i (\mathbf{R}\mathbf{x}^0),$$

که با بهینگی $\mathbf{x}^0$ برای مسئله OWA متناقض است.

به خاطر داشته باشید که در مسئله انتخاب نمونه کار ما، مجموعه عملی Q در شکل کانونی به صورت (1)، معادله (37) ما را مجاز می سازد تا مسئله OWA متناظر (32) را به صورت برنامه خطی زیر بیان نماید

(41) z را ماکزیمم نمایید

(42) تحت AX =b

(43) y – Rx = 0

$$z - \sum_{i=1}^{m} w_{\tau(i)} y_i \leqslant 0 \quad \text{for } \tau \in \Pi, \tag{44}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n. \tag{45}$$

این یک مسئله LP با n+m+1 متغیر و p+m+m محدودیت است. در مسئله (41)-(45)، اپراتور مرتبه بندی Θ با m نامعادله خطی (44) جایگزین می شود. این مسئله، تعداد زیادی از محدودیت ها را تولید می کند اما تمام نامعادله های (44) توسط جایگشت ها بردار تک وزن های wi تعریف می شود.

در حال حل مسئله LP با این روش ساده، تعداد کمتری از محدودیت ها از متغیرها ترجیح داده می شود زیرا منتج به بعد کوچکتر مبنا و از اینرو پیچیدگی محاسباتی کمتر می شود. بنابراین، برای این روش ساده، مقابله با (41)-(45) نسبت به مسئله اصلی بسیار بهتر است. عرضه متغیرهای دوگانه: $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_p)$، $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ و $\mathbf{t} = (t_\tau)_{\tau \in \Pi}$ متناظر با محدودیت های (42)، (43) و (44) به ترتیب است. ما دوگانه زیر را داریم

(46) ub را مینیمم نمایید

(47) تحت uA-vR>0

$$v_i - \sum_{\tau \in \Pi} w_{\tau(i)} t_\tau = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m \tag{48}$$

$$\sum_{\tau \in \Pi} t_\tau = 1, \tag{49}$$

$$t_\tau \geqslant 0 \quad \text{for } \tau \in \Pi \tag{50}$$

مسئله دوگانه (46)-(50) دارای m ستون متناظر با t_τ متغیر است. هرچند، این ستون ها می تواند به صورت مشخص با طرح تولید ستونی هدایت شود. توجه کنید که هر ستون متناظر با t_τ دارای ضریب واحد در سطر

(49) و ضرایب $-w_{\tau(i)}$ در سطرهای (48) است. بنابراین هیچ دلیلی برای مشخص نگهداشتن آنها وجود ندارد. ما تنها نیاز به شناسایی بهترین ستون در مدت قیمت گذاری و تولید ستون برای چرخش داریم.

در مدت دوره این روش سازده، با داشتن مبنای کنونی B، ما راه حل اساسی اولیه کنونی $(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, \mathbf{t}^0)$ و راه حل اساسی دوگانه کنونی $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, z^0)$ (ضرب کننده های دوگانه) را تعریف نمودیم. هزینه کاهش یافته برای متغیر t_τ با فرمول زیر ارائه می شود

$$d(t_\tau) = \sum_{i=1}^{m} w_{\tau(i)} y_i^0 - z^0 \quad \text{for } \tau \in \Pi.$$

به علت (36)، جواب مسئله قیمت گذاری $\min_{\tau\in\Pi} d(t_\tau)$ با جایگشت $\bar{\tau}$ ارائه می شود به طوری که معکوس آن $\bar{\tau}^{-1}$ مراتب غیر افزایشی $\mathbf{y}^0$ است، یعنی $y^0_{\bar{\tau}^{-1}(1)} \leqslant y^0_{\bar{\tau}^{-1}(2)} \leqslant \cdots \leqslant y^0_{\bar{\tau}^{-1}(m)}$ که در آن $\bar{\tau}^{-1}(\bar{\tau}(i)) = i \text{ for } i = 1, 2, \ldots, m.$ در مورد تمام ضرایب مختلف در بردار $\mathbf{y}^0$، یک جایگشت منحصر به فرد $\bar{\tau}$ و ستون درآمد تعریف شده منحصر به فرد وجود دارد. زمانی که برخی ضرایب y_i^0 برابر هستند، آنگاه به گروهی از ستون ها می رسیم که در آن وزن ها با زیرمجموعهی های اندیس های متناظر با ضرایب یکسان جایگشت می شوند. سپس ما می توانیم ترکیبی خطی از این ستو ها را با فاکتورهای مقیاس بندی مثبت مجموعاً برابر با 1 اتخاذ کنیم (مثلاً همه برابر). ما مجاز به انجام این کار مانند ستون ترکیب متناظر با ترکیب عدم برابری ها (44) هستیم که می تواند بدون تاثیر بر راه حل به اولیه اضافه شود.

ما آزمایشات محاسباتی اولیه را با استفاده از داده های 1994 از بازار سهام ورشو اجرا نمودیم. دقیقاً ما مجموعه ای 21 اوراق قرضه را تحلیل نمودیم. با پیاده سازی سرراست این روش سازده با تولید ستون، به آسانی مسائل را برای m تغییر از 10 تا 20 حل نمودیم. در تمام این اجراها، تعداد مراحل ساده انجام شده از 500 تجاوز نمی کند در

حالیکه نزدیک به 200 بود. آزمایشات بیشتر روی مجموعه داده های مختلف برای توجیه این مورد لازم است که ایا این روش ساده می تواند برای مسائل OWA در مقیاس متوسط استفاده شود یا خیر. مشخصاً، مسائل انتخاب نمونه کار مقیاس بزرگ نیاز به تکنیک دیگر راه حل اعمال شده برای مسائل OWA متناظر یا یک تکنیک تجمعی اعمال شده برای مدل معیارهای چندگانه خطی دارد.

6. نتایج و تحقیقات بیشتر

پس از کار پیشگام Sharpe [18]، تلاش های بسیاری بصورت طولی برای خطی نمودن مشکل انتخاب نمونه کارها انجام شده است. اقدامات ریسک مختلف معرفی شده اند که منجر به مدل های برنامه ریزی خطی متوسط در میانگین ریسک شده است. در این مقاله، ما یک مدل معیارهای چندگانه برنامه ریزی خطی را برای مشکل انتخاب نمونه کار توسعه دادیم. روش های کلاسیک برنامه ریزی خطی میانگین ریسک تبدیل به تکنیک های تجمع خاص اعمال شده برای مدل معیارهای چندگانه ما می شود. این مدل بر اساس بدیهیات اولویت برای انتخاب تحت ریسک است. بنابراین، به واسطه جستجوی راه حل های مختلف کارآمد از برنامه های متعدد معیارهای خطی، ما قادر به شناسایی راه حل ها از مسئله بهینه انتخاب نمونه کارها با توجه به ترجیحات ریسک های مختلف مخالف هستیم. با این حال، مدل اجازه می دهد تا انواع روش های معیارهای استاندارد متعدد برای تجزیه و تحلیل مشکل انتخاب نمونه کارها به کارگیری شود.

در این مقاله، ما روی رویکرد کلاسیک و به طور گسترده ای شناخته شده وزندهی برای بهینه سازی معیارهای چندگانه متمرکز شده ایم که نتیجه آن، مسائل برنامه ریزی خطی با تعداد زیادی از محدودیت ها است. با این حال، این مسائل اندازه متوسط به طور موثر می تواند با استفاده از روش سیمپلکس با روش تولید ستون در زمان اعمال برای دوگان آنها حل شود. روش وزندهی، یک تکنیک اساسی در معیارهای چندگانه بهینه سازی است. با این حال، این روش برای پشتیبانی تصمیم گیری تعاملی بسیار موثر نیست (Steuer [20]). بنابراین، تحقیقات بیشتری در مورد امکان استفاده از دیگر روش های چند معیار برای مسئله انتخاب نمونه کار لازم است.

برای حمایت از تصمیم گیری تعاملی بسیار مفید، به اصطلاح تکنیک های بهینه سازی معیارهای چندگانه مبتنی بر آرمان وجود دارد (Lewandowski و Wierzbicki [10]) که از روش نقطه مرجع سرچشمه گرفته است (Wierzbicki [23]، Steuer [20]) روش نقطه مرجع شبیه به برنامه نویسی هدف، از سطوح آرمان برای تعریف اولویت های تصمیم ساز استفاده می کند (Ogryczak و Lahoda [15])، اما به طور کامل سازگار با مدل منطقی از اولویت ها است و بنابراین همیشه یک راه حل کارآمد را تولید می کند. روش نقطه مرجع، هنگامی که برای مدل معیارهای چندگانه استفاده می شود، روش تعاملی توزیع مرجع است که یک روش بسیار جذاب برای حمایت از تصمیم گیری در انتخاب نمونه کارها به نظر می رسد. مسائل بهینه سازی که باید یک توزیع خاص مرجع حل شود، بسیار شبیه به مسائل در نظر گرفته شده در رویکرد وزندهی است.

References

[1] D.E. Bell and H. Raiffa, Risky choice revisited, in: Decision Making: Descriptive, Normative andPrescriptive Interactions, eds. D.E. Bell et al. (Cambridge University Press, Cambridge, 1988) pp. 99–112.
[2] V. Chankong and Y.Y. Haimes, Multiobjective Decision Making (North-Holland, Amsterdam, 1983).
[3] P.C. Fishburn, The Foundations of Expected Utility (Reidel, Dordrecht, 1982).
[4] J.L. Gastwirth, A general definition of the Lorenz curve, Econometrica 39 (1971) 1037–1039.
[5] M.G. Kendall and A. Stuart, The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1: Distribution Theory (Griffin, London, 1958).
[6] R.S. Klein, H. Luss and D.R. Smith, A lexicographic minimax algorithm for multiperiod resource allocation, Math. Programming 55 (1992) 213–234.
[7] H. Konno and H. Yamazaki, Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock market, Manag. Sci. 37 (1991) 519–531.
[8] M.M. Kostreva and W. Ogryczak, Linear optimization with multiple equitable criteria, RAIRO Rech. Oper. 33 (1999) 275–297. ´
[9] H. Levy, Stochastic dominance and expected utility: survey and analysis, Manag. Sci. 38 (1992) 555–593.
[10] A. Lewandowski and A.P. Wierzbicki, eds., Aspiration Based Decision Support Systems – Theory, Software and Applications (Springer, Berlin, 1989).
[11] E. Marchi and J.A. Oviedo, Lexicographic optimality in the multiple objective linear programming: the nucleolar solution, Eur. J. Opl. Res. 57 (1992) 355–359.
[12] H. Markowitz, Portfolio selection, J. Fin. 7 (1952) 77–91. [13] A.W. Marshall and I. Olkin, Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications (Academic Press, New York, 1979).
[14] W. Ogryczak, Equitable multiple criteria programming, Technical Report TR 96–02 (223), Institute of Informatics, Warsaw University, Warsaw (1996).
[15] W. Ogryczak and S. Lahoda, Aspiration/reservation decision support – a step beyond goal programming, J. Multi-Criteria Dec. Anal. 1 (1992) 101–117.
[16] J.A.M. Potters and S.H. Tijs, The nucleolus of a matrix game and other nucleoli, Math. Oper. Res. 17 (1992) 164–174.
[17] U. Segal, Order indifference and rank-dependent probabilities, J. Math. Economics 22 (1993) 373– 397.
[18] W.F. Sharpe, A linear programming approximation for the general portfolio analysis problem, J. Fin. Quant. Anal. 6 (1971) 1263–1275.
[19] M.G. Speranza, Linear programming models for portfolio optimization, Finance 14 (1993) 107–123.
[20] R.E. Steuer, Multiple Criteria Optimization – Theory, Computation & Applications (Wiley, New York, 1986).
[21] Ph. Vincke, Multicriteria Decision–Aid (Wiley, New York, 1992).
[22] G.A. Whitmore and M.C. Findlay, eds., Stochastic Dominance: An Approach to Decision-Making Under Risk (D.C. Heath, Lexington, MA, 1978).
[23] A.P. Wierzbicki, A mathematical basis for satisficing decision making, Math. Modelling 3 (1982) 391–405.
[24] M.E. Yaari, The dual theory of choice under risk, Econometrica 55 (1987) 95–115.
[25] R.R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making, IEEE Trans. Sys. Man Cyber. 18 (1988) 183–190.
[26] R.R. Yager and D.P. Filev, Essentials of Fuzzy Modeling and Control (Wiley, New York, 1994).
[27] S. Yitzhaki, Stochastic dominance, mean variance, and Gini's mean difference, Amer. Econ. Rev. 72 (1982) 178–185.
[28] M.R. Young, A minimax portfolio selection rule with linear programming solution, Manag. Sci. 44 (1998) 673–683.